SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Buljević

HILBERTOVA KOCKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

"Uzdaj se u Gospoda svim srcem svojim, a na svoj razum ne oslanjaj se. Na svim putevima svojim imaj ga na umu, i on će upravljati staze tvoje."

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj ljubavi Antoniu, mom najvećem osloncu i snazi, čovjeku koji me naučio da voljeti znači živjeti.

Zahvaljujem prijateljicama koje imaju posebno mjesto u mome srcu: Snježi, Dei, Marini, Beli, Matei, Adriani, Antoniji i Gubi te su bile i ostale nepresušan izvor radosti, podrške i razumijevanja.

Hvala i mojim curama Mii i Mateji za koje sam sigurna da su mi u život poslane od Gore,koje su me činile boljom osobom i zbog kojih je studiranje u Zagrebu dobilo potpuni smisao.

Veliko hvala dugujem svom mentoru Zvonku na neiscrpnom trudu, volji, hrabrenju, zalaganju i pomoći oko izgradnje samog Diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu promatran je topološki pojam Hilbertove kocke. Naime, da bi dokazali njena osnovna svojstva (metrizabilnost, kompaktnost i separabilnost) bila je potrebna cijela matematička teorija o prostorima koji grade tu kocku.

Prvo poglavlje govori o osnovnim pojmovima: topologija, metrika, norma, skalarni produkt, pokrivač topološkog prostora, svojstvo konačnog presjeka, otvoreni (zatvoreni) skupovi, neprekidnost, zatvarač, filter i njegova svojstva te Hausdorffov prostor.

Drugo poglavlje opisuje svojstva binarne relacije na nekom skupu. Sve se odvija na parcijalno uređenom skupu, promatramo familije dobro uređenih skupova, dokazuju se leme i pomoćne propozicije u svrhu dokaza jednog od velikih teorema - Zornove leme.

Treće poglavlje počima sa definicijom kartezijevog produkta familije skupova, opisuju se svojstva otvorenih skupova, metrizabilnih prostora, uvodi se pojam baze topologije i osnovnih uvijeta koje neka familija mora zadovoljavati da bude baza. Uvodi se pojam predbaze, povezujemo pojam neprekidnosti funkcije sa predbazom. Nakon toga se konstruira familija podskupova kartezijevog produkta skupova koju ćemo uzeti kao bazu produktne topologije na Kartezijevom produktu skupova. Na taj način se uvodi produkt indeksirane familije topoloških prostora. Nadalje, u vezi sa istim produktom uvode se projekcije na beta koordinate indeksirane familije skupova te se dokazuju neka svojstva te projekcije. Nakon toga, dolazi do poveznice konvergencije filtera na produktu i konvergencije projekcije filtera na korespodentnim prostorima. Dolazimo do velikog Tihonovljevog teorema koji govori da je produkt kompaktnih topoloških prostora kompaktan topološki prostor. Bit će riječi i o aksiomima prebrojivosti, prostorima koji ih zadovoljavaju te njihovim odnosima. U ovisnosti o indeksnom skupu izvest ćemo zaključak kada produktni topološki prostor ima neka svojstva,a kada ne. U slučaju kada je taj skup prebrojiv imat ćemo važan zaključak da je produkt metrizabilnih topoloških prostora opet metrizabilan topološki prostor. Za indeksni skup A uzima se skup prirodnih brojeva i definira Hilbertova kocka.
Na kraju, uvodimo pojam topološke ekvivalentnosti metrika, gustog skupa u topološkom prostoru, separabilnosti topološkog prostora te povlačimo konačne zaključke o tome što Hilbertova kocka zadovoljava.

Poglavlje 1

Topološki prostori

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.1.1. *Neka je X skup,* $X \neq \emptyset$ *te neka je* $\mathcal{T}$ *familija podskupova od X takva da vrijede sljedeća svojstva:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. *Ako je* $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ *indeksirana familija elemenata iz* $\mathcal{T}$, *onda je* $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$
3. *Ako su* U, $V \in T$ *onda je* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Tada za $\mathcal{T}$ *kažemo da je TOPOLOGIJA na skupu X, a za uređeni par* $(X,\mathcal{T})$ *kažemo da je topološki prostor.*

Napomena 1.1.1. *Ako je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor onda se indukcijom lako dobiva da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{T}$ *vrijedi* $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Primjer 1.1.1. *Neka je X skup. Tada je* $\mathcal{P}(X)$ *topologija na X. Za* $\mathcal{P}(X)$ *kažemo da je DISKRETNA TOPOLOGIJA na X. Nadalje,* $\{\emptyset, X\}$ *je također topologija na X. Za* $\{\emptyset, X\}$ *kažemo da je INDISKRETNA TOPOLOGIJA na X.*

Definicija 1.1.2. *Neka je X neprazan skup te neka je* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *funkcija sa sljedećim svojstvima:*

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$

4. *$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x,y,z \in X$* ***[nejednakost trokuta]***

Tada uređen par (X,d) zovemo METRIČKI PROSTOR. Za d kažemo da je metrika na skupu X.

Definicija 1.1.3. *Neka je $(V,+,\cdot)$ vektorski prostor nad R. Za funkciju $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ kažemo da je norma na $(V,+,\cdot)$ ako vrijedi sljedeće:*

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in V$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in V$

U tom slučaju kažemo da je $(V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ NORMIRAN PROSTOR.

Pretpostavimo da je $(V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ normiran prostor.
Definirajmo funkciju $d : V \times V \to \mathbb{R}$ sa :

$$d(x,y) = \|x-y\|, \forall x,y \in V \tag{1.1}$$

Tvrdimo da je d metrika na V. Prva tri svojstva iz definicije metrike lako slijede iz svojstava norme. Dokažimo da vrijedi nejednakost trokuta:
Neka su $x,y,z \in V$. Koristeći svojstvo 4. iz definicije norme dobivamo:
$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.
Dakle, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Prema tome, d je metrika na V. Za d kažemo da je METRIKA INDUCIRANA NORMOM $\|\cdot\|$.
Općenito, ako je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $(V,+,\cdot)$ onda se za funkciju $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}, \forall x \in V \tag{1.2}$$

može pokazati da je norma na $(V,+,\cdot)$ (Vidjeti u [3]).
Kažemo da je $\|\cdot\|$ NORMA INDUCIRANA SKALARNIM PRODUKTOM $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Primjer 1.1.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$.*
Neka je $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle \mapsto \langle x|y\rangle$ funkcija definirana sa:

$$\langle (x_1,x_2,x_3,...,x_n)|(y_1,y_2,...,y_n)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ... + x_ny_n. \tag{1.3}$$

Tada je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$, pri čemu na $\mathbb{R}^n$ gledamo standardnu strukturu vektorskog prostora.

Neka je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$ inducirana ovim skalarnim produktom. Tada za $\|\cdot\|$ kažemo da je EUKLIDSKA NORMA na $\mathbb{R}^n$.
Ako je $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, onda je

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}. \tag{1.4}$$

Nadalje, neka je d metrika na $\mathbb{R}^n$ inducirana normom $\|x\|$.
Tada za $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ vrijedi:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.5}$$

Za d kažemo da je EUKLIDSKA METRIKA na $\mathbb{R}^n$.
Uočimo sljedeće: Ako je (X,d) metrički prostor i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ onda je funkcija

$$d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R} \tag{1.6}$$

metrika na Y.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$.
Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$.Tada za $d|_{S\times S}$ kažemo da je euklidska metrika na S.

Definicija 1.1.4. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor te $U \subseteq X$. Kažemo da je U OTVOREN SKUP u $(X,\mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*

Definicija 1.1.5. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor te $\mathcal{U}$ podskup od $\mathcal{T}$.Kažemo da je $\mathcal{U}$ OTVOREN POKRIVAČ topološkog prostora $(X,\mathcal{T})$ ako je $\cup\mathcal{U} = X$.*

Definicija 1.1.6. *Za topološki prostor kažemo da je KOMPAKTAN ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X,\mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$.*

Definicija 1.1.7. *Za nepraznu familiju skupova $\mathcal{F}$ kažemo da ima svojstvo KONAČNOG PRESJEKA ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathcal{F}$ vrijedi $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \neq \emptyset$.*

Definicija 1.1.8. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor te $F \subseteq X$. Kažemo da je F ZATVOREN SKUP u $(X, \mathcal{T})$ ako je $X \setminus F$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*

1.2 Svojstva topoloških prostora

Kompaktnost i neprekidnost

Propozicija 1.2.1. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topolški prostor. Tada je $(X,\mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor ako i samo ako za svaku familiju $\mathcal{F}$ zatvorenih skupova u $(X,\mathcal{T})$ sa svojstvom konačnog presjeka vrijedi $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$.*

Dokaz. $\Rightarrow$
Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan. Neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih skupova u $(X,\mathcal{T})$ sa svojstvom konačnog presjeka. Pretpostavimo da je $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$. Tada je $(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)^c = \emptyset^c$,tj. $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F^c = X$. Stoga je

$$\mathcal{U} = \{F^c \mid F \in \mathcal{F}\} \tag{1.7}$$

otvoreni pokrivač od (X, $\mathcal{T}$).
Budući da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, postoje $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathcal{F}$ takvi da je $X = F_1^c \cup F_2^c \cup ... \cup F_n^c$. Tada je $X^c = (F_1^c \cup F_2^c \cup ... \cup F_n^c)^c$, tj.

$$\emptyset = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \tag{1.8}$$

što je u kontradikciji s činjenicom da $\mathcal{F}$ ima svojstvo konačnog presjeka.
$\Leftarrow$
Obratno, pretpostavimo da za svaku familiju $\mathcal{F}$ zatvorenih skupova u $(X,\mathcal{T})$ sa svojstvom konačnog presjeka vrijedi $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Dokažimo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $(X,\mathcal{T})$. Pretpostavimo da ne postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da $X = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{U}$ vrijedi

$$X \neq U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n.$$

Stoga je $X^c \neq (U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n)^c$,tj.

$$\emptyset \neq U_1^c \cap U_2^c \cap ... \cap U_n^c.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $\mathcal{F} = \{U^c \mid U \in \mathcal{U}\}$ familija zatvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ sa svojstvom konačnog presjeka.
Prema pretpostavci, tada je: $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U^c \neq \emptyset$, tj.

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \neq X$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Dakle, postoji $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, U_2, ..., U_n$ takvi da je

$$U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n = X.$$

Prema tome, $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan. □

Definicija 1.2.1. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor, $x_0 \in X$ te $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x_0 \in U$. Tada za U kažemo da je OTVORENA OKOLINA TOČKE x_0 u $(X,\mathcal{T})$.*

Definicija 1.2.2. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor, $x_0 \in X$ te $N \subseteq X$. Kažemo da je N OKOLINA TOČKE x_0 u $(X,\mathcal{T})$ ako postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x_0 \in U \subseteq N$.*

Uočimo da je U otvorena okolina od x_0 u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je U otvoren skup i okolina od x_0 u $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 1.2.3. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $f : X \to Y$ funkcija te $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija f NEPREKIDNA u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$ postoji otvorena okolina U od x_0 u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $f(U) \subseteq V$.*

Napomena 1.2.1. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $x_0 \in X$ te $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaku okolinu M od $f(x_0)$ postoji okolina N od x_0 takva da je $f(N) \subseteq M$.*
Naime, ako je f neprekidna u x_0 i M okolina od $f(x_0)$ onda postoji otvorena okolina V od $f(x_0)$ takva da je $V \subseteq M$ pa postoji otvorena okolina U od x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Dakle, $f(U) \subseteq M$ i U je okolina od x_0.
Obratno, ako za svaku okolinu M od $f(x_0)$ postoji okolina N od x_0 takva da je $f(N) \subseteq M$, onda za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ postoji okolina N od x_0 takva da je $f(N) \subseteq V$ pa ako je U otvorena okolina od x_0 takva da je $U \subseteq N$ onda imamo $f(U) \subseteq V$.

Definicija 1.2.4. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je funkcija f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Propozicija 1.2.2. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna ako i samo ako je f neprekidna u x, za svaki $x \in X$.*

Dokaz. $\Rightarrow$
Pretpostavimo da je f neprekidna.
Neka je $x_0 \in X$ te neka je V otvorena okolina od $f(x_0)$. Definirajmo $U := f^{-1}(V)$. Iz $V \in \mathcal{S}$ slijedi $U \in \mathcal{T}$. Nadalje, iz $f(x_0) \in V$ slijedi $x_0 \in f^{-1}(V)$, tj. $x_0 \in U$. Dakle, U je otvorena okolina od x_0. Iz definicije skupa U očito je da je $f(U) \subseteq V$. Prema tome, f je neprekidna u x_0.
$\Leftarrow$
Pretpostavimo da je f neprekidna u x za svaki $x \in X$.
Neka je $V \in \mathcal{S}$. Uzmimo $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$ pa je V otvorena okolina od $f(x)$. Budući da je f neprekidna u x, postoji otvorena okolina U_x od x takva da je $f(U_x) \subseteq V$, a to povlači da je $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Slijedi,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

pa zaključujemo da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Dakle, f je neprekidna. □

Zatvoreni skupovi i zatvarač

Propozicija 1.2.3. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor.*

(1.) $\emptyset, X$ *su zatvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{T})$

(2.) Ako je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija zatvorenih skupova u* $(X, \mathcal{T})$ *onda je* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *zatvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$.

(3.) Ako su $F_1, F_2, ..., F_n$ *zatvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{T})$ *onda je* $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ *zatvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. Tvrdnja (1.) je očita.
Ako je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X onda je $(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c$.
Iz ovoga lako slijedi tvrdnja (2.).
Nadalje, ako su $F_1, F_2, ... \subseteq X$ tada je $(F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap ... \cap F_n^c$. Iz ovoga slijedi tvrdnja (3.). □

Definicija 1.2.5. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te neka je* $A \subseteq X$. *Definiramo*

$$\operatorname{Cl} A = \bigcap_{\substack{F \text{zatvoren u } (X,\mathcal{T}) \\ A \subseteq F}} F$$

Za $\operatorname{Cl} A$ *kažemo da je ZATVARAČ skupa* A *u* $(X, \mathcal{T})$.

Napomena 1.2.2. *Uočimo da je* $\operatorname{Cl} A$ *zatvoren skup te da je* $A \subseteq \operatorname{Cl} A$.
Nadalje, ako je F *zatvoren skup takav da je* $A \subseteq F$, *onda je* $\operatorname{Cl} A \subseteq F$.
Također, vrijedi da je A *zatvoren ako i samo ako je* $A = \operatorname{Cl} A$.

Propozicija 1.2.4. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor,* $A \subseteq X$ *te* $x \in X$. *Tada je* $x \in Cl\,A$ *ako i samo ako svaka otvorena okolina od* x *siječe* A.

Dokaz. Uzmimo $x \in \operatorname{Cl} A$. Neka je O otvorena okolina od x.
Pretpostavimo da je $O \cap A = \emptyset$.
Tada je $A \subseteq O^c$ pa je $\operatorname{Cl} A \subseteq O^c$ (jer je O^c zatvoren skup).
Slijedi,

$$\operatorname{Cl} A \cap O = \emptyset,$$

no, ovo je nemoguće jer je $x \in \operatorname{Cl} A$ i $x \in O$. Prema tome, $O \cap A \neq \emptyset$.
Obratno, uzmimo da svaka otvorena okolina od x siječe A. Pretpostavimo da $x \notin \operatorname{Cl} A$.
Iz ovoga i definicije od A slijedi da postoji zatvoren skup F takav da je $A \subseteq F$ i $x \notin F$.
Tada je $x \in F^c$ i $F^c \cap A = \emptyset$.
Dakle, F^c je otvorena okolina točke x koja ne siječe A. Kontradikcija. Prema tome, $x \in \operatorname{Cl} A$. □

1.3 Filteri

Definicija, baza i slika filtera

Definicija 1.3.1. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija nepraznih podskupova od X takva da vrijedi sljedeće.*

(1.) Ako su $F, G \in \mathcal{F}$, onda je $F \cap G \in \mathcal{F}$.

(2.) Ako je $F \in \mathcal{F}$ i $G \subseteq X$ takav da je $F \subseteq G$, onda je $G \in \mathcal{F}$.

Tada za $\mathcal{F}$ kažemo da je FILTER na skupu X.

Primjer 1.3.1. *Neka je X skup te neka je $x_0 \in X$. Neka je $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid x_0 \in F\}$. Tada je $\mathcal{F}$ očito filter na X.*

Primjer 1.3.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $x_0 \in X$. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih okolina od x_0 u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{F}$ filter na X.*

Definicija 1.3.2. *Neka je $\mathcal{F}$ filter na skupu X te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Pretpostavimo da za svaki $F \in \mathcal{F}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $B \subseteq F$.Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je BAZA filtera $\mathcal{F}$.*

Primjer 1.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $x_0 \in X$. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih okolina od x_0 u $(X, \mathcal{T})$ te neka je $\mathcal{B}$ familija svih otvorenih okolina od x_0 u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{B}$ baza filtera $\mathcal{F}$.*

Propozicija 1.3.1. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{B}$ neprazna familija nepraznih podskupova od X. Pretpostavimo da za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Tada postoji jedinstveni filter $\mathcal{F}$ na X takav da je $\mathcal{B}$ baza filtera $\mathcal{F}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid \textit{postoji } B \in \mathcal{B} \textit{ takav da je } B \subseteq F\}$.
Očito je

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F},$$

dakle $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Tvrdimo da je $\mathcal{F}$ filter na X kojem je $\mathcal{B}$ baza. Neka su $F, G \in \mathcal{F}$. Tada postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $B_1 \subseteq F$, $B_2 \subseteq G$ pa je $B_1 \cap B_2 \subseteq F \cap G$. Prema pretpostavci postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Slijedi $B_3 \subseteq F \cap G$. Dakle, $F \cap G \in F$.
Ako je $F \in \mathcal{F}$ i $G \subseteq X$ takav da je $F \subseteq G$ onda je očito $G \in \mathcal{F}$.
Prema tome, $\mathcal{F}$ je filter na X.
Iz definicije od $\mathcal{F}$ je jasno da je $\mathcal{B}$ baza filtera $\mathcal{F}$.
Pretpostavimo da su $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ filteri na X kojima je $\mathcal{B}$ baza. Neka je $F_1 \in \mathcal{F}_1$
Tada postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $B \subseteq F_1$. Znamo da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_2$ pa je $B \in \mathcal{F}_2$ te iz činjenice da je $\mathcal{F}_2$ filter slijedi $F_1 \in \mathcal{F}_2$.
Time smo dokazali $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, a analogno dobivamo $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$, prema tome: $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. □

Primjer 1.3.4. *Neka su X i Y skupovi, $f : X \to Y$ funkcija te $\mathcal{F}$ filter na X. Tada familija $\mathcal{G} = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ ne mora biti filter na Y.*
Naime, ako f nije surjekcija, onda očito $Y \notin \mathcal{G}$ pa $\mathcal{G}$ nije filter na Y (u suprotnom bi iz svojstva (2.) iz definicije filtera slijedilo $Y \in \mathcal{G}$).
No, za familiju $\mathcal{G}$ uvijek vrijedi uvjet (1.) iz definicije filtera (neovisno o tome je li f surjekcija). Dokažimo to.
Neka su $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Tada je $G_1 = f(F_1)$, $G_2 = f(F_2)$ gdje su $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.
Neka je $F_3 = \{x \in F_1 \mid f(x) \in f(F_2)\}$.
Vrijedi: $F_1 \cap F_2 \subseteq F_3$ pa zbog $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ imamo $F_3 \in \mathcal{F}$. Tvrdimo da je

$$f(F_3) = f(F_1) \cap f(F_2). \tag{1.9}$$

Očito je $f(F_3) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$.
S druge strane , neka je $y \in f(F_1) \cap f(F_2)$.
Tada je $y \in f(F_1)$ pa je $y = f(x)$ za neki $x \in F_1$, no zbog $y \in f(F_2)$ imamo $f(x) \in f(F_2)$ pa je $x \in F_3$ pa vrijedi (1.9).
Zaključujemo da je $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.
Pretpostavimo sada da je f surjekcija.
Tvrdimo da tada za $\mathcal{G}$ vrijedi uvijet (2.) iz definicije filtera.
Pretpostavimo da je $F \in \mathcal{F}$ te da je $G \subseteq Y$ takav da je $f(F) \subseteq G$. Definirajmo

$$F' = f^{-1}(G).$$

Ako je $x \in F$ onda je $f(x) \in f(F)$ pa je $f(x) \in G$ što povlači $x \in f^{-1}(G)$, tj. $x \in F'$. Prema tome, $F \subseteq F'$.
Iz ovoga slijedi da je $F' \in \mathcal{F}$.
Iz činjenice da je f surjekcija slijedi da je $f(f^{-1}(G)) = G$, tj. $f(F') = G$. Prema tome, $G \in \mathcal{G}$.
Na temelju svega navedenog, imamo sljedeći zaključak:
$\mathcal{G}$ je filter ako i samo ako je f surjekcija.

Definicija 1.3.3. *Neka su X i Y skupovi, $f : X \to Y$ funkcija te $\mathcal{F}$ filter na X.*
Očito je $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ neprazna familija nepraznih podskupova od Y, a za sve $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2),\ F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}.$$

Stoga, prema Propoziciji 1.3.1 postoji jedinstveni filter na Y kojem je $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ baza.
Taj filter označavamo sa $f(\mathcal{F})$.
Uočimo da je prema Primjeru 1.3.4 $f(\mathcal{F}) = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ kada je f surjekcija.

Konvergencija filtera i neprekidnost funkcije

Definicija 1.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $x_0 \in X$ te $\mathcal{F}$ filter na X. Kažemo da filter $\mathcal{F}$ KONVERGIRA prema x_0 u $(X, \mathcal{T})$ i pišemo $\mathcal{F} \to x_0$ ako za svaku okolinu N od x_0 u $(X, \mathcal{T})$ vrijedi $N \in \mathcal{F}$. Kažemo da je x_0 LIMES filtera $\mathcal{F}$.*

Propozicija 1.3.2. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $x_0 \in X$ i $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki filter $\mathcal{F}$ na X takav da*

$$\mathcal{F} \to x_0$$

vrijedi

$$f(\mathcal{F}) \to f(x_0).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0.
Neka je $\mathcal{F}$ filter na X takav da $\mathcal{F} \to x_0$. Dokažimo da $f(\mathcal{F}) \to f(x_0)$.
Neka je V okolina od $f(x_0)$. Budući da je f neprekidna u x_0 postoji okolina U od x_0 tako da je $f(U) \subseteq V$. Iz $\mathcal{F} \to x_0$ slijedi $U \in \mathcal{F}$.
Imamo da je

$$\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$$

baza od $f(\mathcal{F})$ i $f(U) \in \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$. Stoga je $f(U) \in f(\mathcal{F})$. Budući da je $f(U) \subseteq V$ te da je $f(\mathcal{F})$ filter, vrijedi da je $V \in f(\mathcal{F})$.
Dakle,

$$f(\mathcal{F}) \to f(x_0).$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki filter $\mathcal{F}$ na X takav da je $\mathcal{F} \to x_0$ vrijedi $f(\mathcal{F}) \to f(x_0)$.
Dokažimo da je f neprekidna u x_0. Neka je V okolina od $f(x_0)$.
Definirajmo $\mathcal{F} = \{U \mid U \text{ okolina od } x_0\}$.
Tada je $\mathcal{F}$ filter na X takav da vrijedi $\mathcal{F} \to x_0$.
Prema pretpostavci, tada vrijedi $f(\mathcal{F}) \to f(x_0)$. Iz ovoga slijedi da je $V \in f(\mathcal{F})$.
Budući da je $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ baza od $f(\mathcal{F})$ postoji $U \in \mathcal{F}$ takav da je $f(U) \subseteq V$.
Dakle, U je okolina točke x_0 i $f(U) \subseteq V$.
Time smo dokazali da je f neprekidna u x_0.

□

Kompaktonst i gomilište filtera

Definicija 1.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\mathcal{F}$ filter na X te $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 gomilište filtera $\mathcal{F}$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki $F \in \mathcal{F}$ vrijedi $x_0 \in Cl\, F$.*

Napomena 1.3.1. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor, $\mathcal{F}$ filter na X te $x_0 \in X$. Pretpostavimo $\mathcal{F} \to x_0$. Tada je x_0 gomilište filtera $\mathcal{F}$. Naime, neka je $F \in \mathcal{F}$. Neka je U otvorena okolina od x_0. Tada je $U \in \mathcal{F}$ pa slijedi $U \cap F \in \mathcal{F}$. Stoga je $U \cap F \neq \emptyset$. Iz Propozicije 1.2.4 slijedi $x_0 \in \mathrm{Cl}\, F$.*

Teorem 1.3.2. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $(X,\mathcal{T})$ kompaktan ako i samo ako svaki filter na X ima gomilište u $(X,\mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X,\mathcal{T})$ kompaktan. Neka je $\mathcal{F}$ filter na X.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathcal{F}$.
Iz definicije filtera slijedi da je

$$F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \in \mathcal{F}$$

pa je $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \neq \emptyset$ stoga je

$$Cl\, F_1 \cap Cl\, F_2 \cap ... \cap Cl\, F_n \neq \emptyset.$$

Ovim smo pokazali da je

$$\{Cl\, F \mid F \in \mathcal{F}\}$$

familija zatvorenih skupova sa svojstvom konačnog presjeka. Iz Propozicije 1.2.1 slijedi da je

$$\bigcap_{F\mathcal{F}} Cl\, F \neq \emptyset.$$

Dakle, postoji $x_0 \in X$ takav da je $x_0 \in Cl\, F$ za svaki $F \in \mathcal{F}$.
Prema tome, $\mathcal{F}$ ima gomlilište u $(X, \mathcal{T})$.
Obratno, pretpostavimo da svaki filter na X ima gomilište u $(X,\mathcal{T})$.
Dokažimo da je $(X,\mathcal{T})$ kompaktan.
Neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih skupova sa svojstvom konačnog presjeka.
Neka je

$$\mathcal{B} = \{F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \mid F_1, F_2, ..., F_n \in \mathcal{F}\}.$$

Uočimo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$.
Očito je $\mathcal{B}$ neprazna familija nepraznih podskupova od X.
Nadalje za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ vrijedi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Stoga, prema Propoziciji 1.3.1 postoji filter $\mathcal{G}$ na X kojem je $\mathcal{B}$ baza.
Iz $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ slijedi da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
Prema pretpostavci, postoji $x_0 \in X$ takav da je x_0 gomilište od $\mathcal{G}$. Stoga, za svaki $G \in \mathcal{G}$ vrijedi da je $x_0 \in Cl\, G$.
Posebno, za svaki $F \in \mathcal{F}$ vrijedi da je $x_0 \in Cl\, F$. Budući da je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih skupova, za svaki $F \in \mathcal{F}$ vrijedi da je $F = Cl\, F$.

Dakle, $x_0 \in F$, za svaki $F \in \mathcal{F}$.
Prema tome, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Iz Propozicije 1.2.1 slijedi da je topološki prostor $(X,\mathcal{T})$ kompaktan. □

Propozicija 1.3.3. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor, $x_0 \in X$ te neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ filteri na X takvi da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ te da $\mathcal{F} \to x_0$. Tada je x_0 gomilište od $\mathcal{G}$.*

Dokaz. Iz napomene 1.3.3 slijedi da je x_0 gomilište filtera $\mathcal{F}$ pa iz $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ odmah slijedi da je x_0 gomilište od $\mathcal{G}$. □

1.4 Ultrafilter i njegova svojstva

Definicija 1.4.1. *Neka je S skup te neka je $\mathcal{F}$ filter na X.*
Kažemo da je $\mathcal{F}$ ULTRAFILTER na X ako ne postoji filter $\mathcal{G}$ na X takav da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ i $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$.

Primjer 1.4.1. *Neka je X skup te neka su $a, b \in X$ takvi da je $a \neq b$.*
Definiramo

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid a, b \in F\}$$

i

$$\mathcal{G} = \{F \subseteq X \mid a \in F\}.$$

Očito su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ filteri na X takvi da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Vrijedi $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ jer je $\{a\} \in \mathcal{G}$, a $\{a\} \notin \mathcal{F}$.
Stoga $\mathcal{F}$ nije ultrafilter. S druge strane, tvrdimo da je $\mathcal{G}$ ultrafilter na X.
Pretpostavimo da je $\mathcal{H}$ filter na X takav da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$.
Uzmimo $H \in \mathcal{H}$. Imamo $\{a\} \in \mathcal{G}$ pa je $\{a\} \in \mathcal{H}$,a to povlači da je $\{a\} \cap H \in \mathcal{H}$.
Dakle, $\{a\} \cap H \neq \emptyset$ pa je $\{a\} \subseteq H$. Stoga je $H \in \mathcal{G}$.
Prema tome, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ pa je $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Dakle, $\mathcal{G}$ je ultrafilter na X.

Propozicija 1.4.1. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{F}$ filter na X. Tada je $\mathcal{F}$ ultrafilter na X ako i samo ako za svaki $A \subseteq X$ takav da je $F \cap A \neq \emptyset$ za svaki $F \in \mathcal{F}$, vrijedi $A \in \mathcal{F}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ ultrafilter na X.
Neka je $A \subseteq X$ takav da je $F \cap A \neq \emptyset$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Neka je

$$\mathcal{B} = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}.$$

Očito je $\mathcal{B}$ neprazna familija nepraznih podskupova od X.
Nadalje, za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ vrijedi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Prema Propoziciji 1.3.1 slijedi da postoji filter $\mathcal{G}$ na X kojem je $\mathcal{B}$ baza.
Tvrdimo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Uzmimo $F \in \mathcal{F}$. Tada je $F \cap A \in \mathcal{B}$ pa zbog $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$, imamo

$F \cap A \in \mathcal{G}$.
No, $F \cap A \subseteq F$ pa iz činjenice da je $\mathcal{G}$ filter, slijedi $F \in \mathcal{G}$. Dakle, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Nadalje, odaberimo $F \in \mathcal{F}$. Imamo $F \cap A \in \mathcal{G}$ i $F \cap A \subseteq A$ pa je $A \in \mathcal{G}$.
Iz $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ i činjenice da je $\mathcal{F}$ ultrafilter slijedi $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Stoga je $A \in \mathcal{F}$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki $A \subseteq X$ takav da je $F \cap A \neq \emptyset$, za svaki $F \in \mathcal{F}$, vrijedi $A \in \mathcal{F}$. Želimo dokazati da je $\mathcal{F}$ ultrafilter. Neka je $\mathcal{G}$ filter na X takav da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Neka je $A \in \mathcal{G}$. Neka je $F \in \mathcal{F}$. Tada je $F \in \mathcal{G}$ pa slijedi $F \cap A \in \mathcal{G}$. Dakle, $F \cap A \neq \emptyset$, za svaki $F \in \mathcal{F}$. Prema pretpostavci vrijedi $A \in \mathcal{F}$. Time smo dokazali da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Prema tome, $\mathcal{F}$ je ultrafilter. □

Primjer 1.4.2. *Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $\mathcal{F}$ filter na X, onda svaki limes od $\mathcal{F}$ u $(X, \mathcal{T})$ mora biti i gomilište od $\mathcal{F}$ u $(X, \mathcal{T})$ (Napomena1.3.1).*
Obratno, međutim, ne mora vrijediti.
Naime, neka je X skup koji ima barem 2 elementa. Odaberimo $a, b \in X, a \neq b$.
Neka je
$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid a, b \in F\}.$$
Tada je $\mathcal{F}$ filter na X. Za svaki $F \in \mathcal{F}$ očito vrijedi $a \in F$. Stoga je a gomilište filtera $\mathcal{F}$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ za svaku topologiju $\mathcal{T}$ na X.
Uzmimo sada $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Tada je $\{a\}$ okolina od a u $(X, \mathcal{T})$, no $a \notin \mathcal{F}$.
Prema tome, a nije limes od $\mathcal{F}$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 1.4.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $\mathcal{F}$ filter na X te neka je x_0 gomilište od $\mathcal{F}$ u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ ultrafilter. Tada $\mathcal{F} \to x_0$ u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je N okolina od x_0 u $(X, \mathcal{T})$. Želimo pokazati da je $N \in \mathcal{F}$. U tu svrhu je prema Propoziciji 1.4.1 dovoljno dokazati da N siječe svaki član od $\mathcal{F}$.
Neka je $F \in \mathcal{F}$. Imamo $x_0 \in \operatorname{Cl} F$ pa iz 1.2.4 slijedi da je $N \cap F \neq \emptyset$. Dakle, $N \in \mathcal{F}$. Prema tome, $\mathcal{F} \to x_0$. □

Definicija 1.4.2. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je Hausdorffov ako za sve $x, y \in X$, $x \neq y$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Primjer 1.4.3. *Limes filtera u topološkom prostoru ne mora biti jedinstven.*
Naime, ako je X neprazan skup onda svaki filter na X konvergira svakoj točki iz X u topološkom prostoru $(X, \{X, \emptyset\})$.
S druge strane, neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor, neka je $\mathcal{F}$ filter na X te neka su $a, b \in X$ takvi da $\mathcal{F} \to a$ i $\mathcal{F} \to b$. Tada je $a = b$. Naime, u suprotnom bi postojali otvoreni disjunktni skupovi U i V takvi da je $a \in U$, $b \in V$.
Iz $\mathcal{F} \to a$ slijedi $U \in \mathcal{F}$,a iz $\mathcal{F} \to b$ slijedi $V \in \mathcal{F}$, stoga je $U \cap V \in \mathcal{F}$, što je nemoguće.
Prema tome, limes filtera u Hausdorffovom prostoru, ako postoji, je jedinstven.

Propozicija 1.4.3. *Neka su X, Y skupovi, neka je $\mathcal{F}$ ultrafilter na X te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je $f(\mathcal{F})$ ultrafilter na Y.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $B \subseteq Y$ takav da je $B \cap G \neq \emptyset$, za svaki $G \in f(\mathcal{F})$.
Posebno je tada $B \cap f(F) \neq \emptyset$, za svaki $F \in \mathcal{F}$.
Neka je $F \in \mathcal{F}$. Iz $B \cap f(F) \neq \emptyset$ slijedi da postoji $x \in F$ takav da je $f(x) \in B$. Slijedi, $x \in f^{-1}(B)$, tj. $x \in f^{-1}(B) \cap F$. Prema tome, $f^{-1}(B) \cap F \neq \emptyset$, za svaki $F \in \mathcal{F}$. Iz Propozicije 1.4.1 slijedi $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.
Stoga je $f(f^{-1}(B)) \in f(\mathcal{F})$. Očito je $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pa iz definicije filtera slijedi da je $B \in f(\mathcal{F})$. Iz Propozicije 1.4.1 slijedi da je $f(\mathcal{F})$ ultrafilter. $\square$

Poglavlje 2

Parcijalno uređen skup.Zornova lema.

2.1 Parcijalno uređen skup

Minimum i dobro uređen skup

Definicija 2.1.1. *Neka je S skup te $r \subseteq S \times S$. Tada za r kažemo da je BINARNA RELACIJA na S. U tom slučaju, za $x, y \in S$ umjesto $(x, y) \in r$ pišemo i xry.*

Definicija 2.1.2. *Za binarnu relaciju r na skupu S kažemo da je REFLEKSIVNA ako za svaki $x \in S$ vrijedi xrx.*
Za binarnu relaciju r na skupu S kažemo da je ANTISIMETRIČNA ako za sve $x, y \in S$ takve da je xry i yrx vrijedi $x = y$.
Za binarnu relaciju r na skupu S kažemo da je TRANZITIVNA ako za sve $x, y, z \in S$ takve da je xry i yrz vrijedi xrz.

Definicija 2.1.3. *Za binarnu relaciju $\leq$ na S kažemo da je PARCIJALNI UREĐAJ na S ako je $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. U tom slučaju, za uređni par $(S, \leq)$ kažemo da je PARCIJALNO UREĐEN SKUP.*
Za parcijalni uređaj $\leq$ na skupu S takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$ kažemo da je TOTALNI UREĐAJ. U tom slučaju za uređen par $(S, \leq)$ kažemo da je TOTALNO UREĐEN SKUP.

Definicija 2.1.4. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup, neka je $A \subseteq S$ te neka je $a_0 \in A$. Kažemo da je a_0 MINIMUM skupa A u $(S, \leq)$ ako za svaki $a \in A$ vijedi $a_0 \leq a$.*

Definicija 2.1.5. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup te neka je $X \subseteq S$.*
Za X kažemo da je DOBRO UREĐEN SKUP u $(S, \leq)$ ako svaki neprazan podskup od X ima minimum u $(S, \leq)$.

Uočimo sljedeće:
Ako je X dobro uređen skup u $(S, \leq)$ te ako su $x, y \in X$, onda je $x \leq y$ ili $y \leq x$.
Naime, $\{x, y\}$ je neprazan podskup od X te stoga ima minimum pa je $x \leq y$ ili $y \leq x$.

Definicija 2.1.6. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređem skup te neka su $X, Y \subseteq S$.*
Pišemo $Y \leq X$ ako je $Y \subseteq X$ te ako za svaki $y \in Y$ te za svaki $x \in X$ takav da je

$$x \leq y \text{ vrijedi } x \in Y. \tag{2.1}$$

Napomena 2.1.1. *Ako je $\leq$ parcijalni uređaj na skupu S, onda za $x, y \in S$ sa $x \prec y$ označavamo činjenicu da je $x \leq y$ i $x \neq y$.*

Lema 2.1.1. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup te $\mathcal{F}$ familija dobro uređenih skupova u $(S, \leq)$ takva da za sve $X, Y \in \mathcal{F}$ vrijedi $X \leq Y$ ili $Y \leq X$. Neka je $F = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$. Tada je F dobro uređen skup u $(S, \leq)$ te za svaki $X \in \mathcal{F}$ vrijedi $X \leq F$.*

Dokaz. Neka je $X \in \mathcal{F}$. Očito je $X \subseteq F$. Neka su $x \in X$ i $f \in F$ takvi da je $f \leq x$. Budući da je $f \in F$ postoji $Y \in \mathcal{F}$ takav da je $f \in Y$. Vrijedi $X \leq Y$ ili $Y \leq X$.
Ako je $Y \leq X$, onda je $Y \subseteq X$ pa je $f \in X$.
Ako je $X \leq Y$ onda imamo $x \in X$, $f \in Y$ i $f \leq x$ pa iz (2.1) slijedi $f \in X$.
U oba slučaja je $f \in X$ pa zaključujemo $X \leq F$.(iz (2.1))
Neka je A neprazan podskup od F. Odaberimo $a_1 \in A$. Imamo $a_1 \in F$ pa postoji $X \in \mathcal{F}$ takav da je $a_1 \in X$.
Neka je $A' = \{x \in X \cap A \mid x \leq a_1\}$. Očito je A' neprazan podskup od X ($a_1 \in A'$) pa iz činjenice da je X dobro uređen u $(S, \leq)$ slijedi da skup A' ima minimum a_0 u $(S, \leq)$. Tvrdimo da je a_0 minimum skupa A.
Neka je $a \in A$. Tada postoji $Y \in \mathcal{F}$ takav da je $a \in Y$.
Imamo $a_1 \in X$, $a \in Y$ te $X \leq Y$ ili $Y \leq X$. Ako je $X \leq Y$ onda je $X \subseteq Y$ pa imamo $a_1, a \in Y$,a ako je $Y \leq X$ onda je $a_1, a \in X$. Dakle, a_1 i a su elementi dobro uređenog skupa pa slijedi $a_1 \leq a$ ili $a \leq a_1$.
Prvi slučaj: $a_1 \leq a$. Znamo da je $a_0 \leq a_1$ pa je $a_0 \leq a$.
Drugi slučaj:$a \leq a_1$. Znamo da je $X \leq F$, $a \in F$ i $a_1 \in X$ pa slijedi $a \in X$.
Prema tome, $a \in X \cap A$ i $a \leq a_1$ pa je $a \in A'$. Stoga je očito $a_0 \leq a$. Zaključujemo da je a_0 minimum skupa A.
Prema tome, F je dobro uređen skup. □

Lema 2.1.2. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup. Neka je X dobro uređen skup u $(S, \leq)$ te neka je $Y \subseteq S$ takav da je $Y \leq X$ i $Y \neq X$.*
Tada postoji $x \in X$ takav da je $Y = \{y \in X \mid y \prec x\}$.

Dokaz. Iz $Y \subseteq X$ i $Y \neq X$ slijedi da je $X \setminus Y \neq \emptyset$.
Budući da je X dobro uređen postoji minimum x od $X \setminus Y$.
Tvrdimo da je

$$Y = \{y \in X \mid y \prec x\}. \tag{2.2}$$

Neka je $y \in Y$. Očito je $y \in X$. Budući da je X dobro uređen, vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. Ako je $x \leq y$ onda iz $Y \leq X$ slijedi da je $x \in Y$, što je nemoguće jer je $x \in X \setminus Y$. Stoga je $y \leq x$. No, $y \neq x$ (jer je $y \in Y$, $x \in X \setminus Y$) pa je $y \prec x$. Prema tome, $Y \subseteq \{y \in X \mid y \prec x\}$.
Obratno, neka je $y \in X$ takav da $y \prec x$. Pretpostavimo da $y \notin Y$. Tada je $y \in X \setminus Y$ pa slijedi $x \leq y$. Ovo je u kontradikciji sa $y \prec x$ ($y \prec x$ povlači $y \leq x$ pa antisimetričnost relacije $\leq$ daje $x = y$, što je nemoguće zbog $x \prec y$).
Dakle, $y \in Y$ pa smo dokazali $\{y \in X \mid y \prec x\} \subseteq Y$. Prema tome, vrijedi (2.2). □

Gornja međa,odozgo omeđen skup, maksimalan element

Definicija 2.1.7. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup, neka je $A \subseteq S$ te $x_0 \in S$.
Kažemo da je x_0 GORNJA MEĐA od A u $(S, \leq)$ ako je $x \leq x_0$ za svaki $x \in A$.*

Definicija 2.1.8. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup te neka je $A \subseteq S$. Kažemo da je A ODOZGO OMEĐEN skup u $(S, \leq)$ ako postoji $x_0 \in S$ takav da je x_0 gornja međa od A u $(S, \leq)$.*

Definicija 2.1.9. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup te $m \in S$.
Kažemo da je m MAKSIMALAN ELEMENT u $(S, \leq)$ ako ne postoji $x \in S$ takav da je $m \prec x$.*

2.2 Zornova lema

Teorem 2.2.1. (ZORNOVA LEMA) *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup. Pretpostavimo da je svaki dobro uređen skup u $(S, \leq)$ odozgo omeđen. Tada $(S, \leq)$ ima maksimalan element.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji maksimalan element u $(S, \leq)$.
Neka je C dobro uređen skup u $(S, \leq)$. Tada, prema pretpostavci teorema, postoji $x_0 \in S$ takav da je x_0 gornja međa od C.
Budući da $(S, \leq)$ nema maksimalnog elementa, postoji $x_1 \in S$ takav da je $x_0 \prec x_1$.
Općenito, ako su $a, b, c \in S$ takvi da je $a \leq b \prec c$ onda je $a \prec c$. Naime, sigurno je $a \leq c$, a kada bi vrijedilo $a = c$ onda bismo imali $c \leq b \prec c$ što je nemoguće zbog $b \prec c$.
Sada, ako je $x \in C$ onda imamo $x \leq x_0 \prec x_1$ pa je $x \prec x_1$. Stoga je x_1 gornja međa od C,a ovo ujedno znači da $x_1 \notin C$.
Dakle, svaki dobro uređen skup C u $(S, \leq)$ ima gornju među koja nije u C.

Neka je $\mathcal{D}$ familija svih dobro uređenih skupova u $(S, \leq)$. Za svaki $C \in \mathcal{D}$ odaberimo $g(C) \in S$ takav da je $g(C)$ gornja međa od C i $g(C) \notin S$. Na taj način dobivamo funkciju $g : \mathcal{D} \to S$. Uočimo: ako je $C \in \mathcal{D}$ te $c_0 \in C$ onda je $\{x \in C \mid x \prec c_0\} \in \mathcal{D}$.
Naime, očito je svaki podskup dobro uređenog skupa, dobro uređen skup.
Za $C \in \mathcal{D}$ ćemo reći da je g-skup ako za svaki $c_0 \in C$ vrijedi

$$g(\{x \in C \mid x \prec c_0\}) = c_0.$$

Neka su C i D g-skupovi.
Tvrdimo da je

$$C \leq D \text{ ili } D \leq C. \tag{2.3}$$

Neka je W unija svih $B \subseteq X$ takvih da je $B \leq C$ i $B \leq D$.
Tvrdimo $W \leq C$. Očito je $W \subseteq C$. Pretpostavimo da su $w \in W$ i $c \in C$ takvi da je $c \leq w$. Slijedi da postoji $B \subseteq X$ takav da je $B \leq C$, $B \leq D$ i $w \in B$. Iz $B \leq C$ slijedi $c \in B$ pa je $c \in W$. Time smo dokazali $W \leq C$, a analogno dobivamo $W \leq D$.
Ako je $W = C$ ili $W = D$ onda vrijedi (2.3).
Pretpostavimo da je $W \neq C$ i $W \neq D$.
Iz $W \leq C$, $W \neq C$ i Leme 2.1.2 slijedi da postoji $c_0 \in C$ takav da je

$$W = \{x \in C \mid x \prec c_0\}. \tag{2.4}$$

Isto tako, iz $W \leq D$, $W \neq D$ i Leme 2.1.2 slijedi da postoji $d_0 \in D$ takav da je

$$W = \{x \in D \mid x \prec d_0\}. \tag{2.5}$$

Iz činjenice da su C i D g-skupovi slijedi da je $g(W) = c_0$ i $g(W) = d_0$.
Prema tome, $c_0 = d_0$.
Definirajmo:

$$W' = W \cup \{c_0\}.$$

Iz (2.4) slijedi da je $W' = \{x \in C \mid x \leq c_0\}$.
Iz ovoga je jasno da je $W' \leq C$.
Analogno zaključujemo da je $W' \leq D$.
Iz definicije skupa W slijedi da je $W' \subseteq W$.
Posebno, $c_0 \in W$ (jer je $c_0 \in W'$), no to je u kontradikciji sa (2.4).
Time smo dokazali da vrijedi (2.3).
Neka je F unija svih g-skupova.
Prema dokazanom i Lemi 2.1.1 F je dobro uređen skup te za svaki g-skup C vrijedi $C \leq F$.
Tvrdimo da je $F \cup \{g(F)\}$ g-skup. Neka je $c_0 \in F \cup \{g(F)\}$. Ako je $c_0 = g(F)$, onda je $g(\{x \in F \cup \{g(F)\} \mid x \prec c_0\}) = g(F)$.
Ako je $c_0 \in F$ onda je $\{x \in F \cup \{g(F)\} \mid x \prec c_0\} = \{x \in F \mid x \prec c_0\}$.

Iz $c_0 \in F$ slijedi da postoji g-skup C takav da je $c_0 \in C$. Iz $C \leq F$ lako zaključujemo da je: $\{x \in F \mid x \prec c_0\} = \{x \in C \mid x \prec c_0\}$. Stoga je

$$g(\{x \in F \cup \{g(F)\} \mid x \prec c_0\}) = g(\{x \in C \mid x \prec c_0\}) = c_0.$$

Prema tome, $F \cup \{g(F)\}$ je g-skup.
Iz definicije od F slijedi da je $F \cup g(F) \subseteq F$ pa je $g(F) \in F$, što je u kontradikciji s činjenicom da $g(C) \notin C$, za svaki $C \in \mathcal{D}$.
Zaključak: Postoji maksimalan element u $(S, \leq)$. (Dokaz po uzoru na: [2]) $\square$

2.3 Postojanje ultrafiltera kao nadskupa

Propozicija 2.3.1. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{F}$ filter na X. Tada postoji ultrafilter $\mathcal{G}$ na X takav da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.*

Dokaz. Neka je G familija svih filtera $\mathcal{G}$ na X takvih da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
Na G definiramo binarnu relaciju $\leq$ na sljedeći način: $\mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_2$ ako je $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$.
Tada je $\leq$ parcijalni uređaj na G, dakle, $(G, \leq)$ je parcijalno uređen skup. Dokažimo da $(G, \leq)$ ima maksimalni element.
Neka je D dobro uređen skup u $(G, \leq)$.
Ako je $D = \emptyset$ onda je svaki elemeant od G (npr. $\mathcal{F}$) gornja međa od D.
Pretpostavimo da je $D \neq \emptyset$.
Definirajmo $\mathcal{D} = \bigcup_{\mathcal{G} \in D} \mathcal{G}$. Tvrdimo da je $\mathcal{D}$ filter na X. Budući da je $D \neq \emptyset$ postoji $\mathcal{G} \in D$. Slijedi $\mathcal{G} \in G$ pa je $\mathcal{G}$ filter na X takav da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
Iz $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$ slijedi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$.
Stoga je $\mathcal{D}$ naprazna familija skupova. Očito je $\mathcal{D}$ familija podskupova od X.
Kada bi vrijedilo $\emptyset \in \mathcal{D}$ onda bi postojao $\mathcal{G} \in \mathcal{D}$ takav da je $\emptyset \in \mathcal{G}$, što je nemoguće jer je $\mathcal{G}$ filter.
Neka su $F_1, F_2 \in \mathcal{D}$. Tada postoje $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in D$ takvi da je $F_1 \in \mathcal{G}_1$ i $F_2 \in \mathcal{G}_2$.
Budući da je D dobro uređen skup u $(G, \leq)$ vrijedi $\mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_2$ ili $\mathcal{G}_2 \leq \mathcal{G}_1$. tj. $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ ili $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$.
Ako je $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ onda imamo $F_1, F_2 \in \mathcal{G}_2$ pa je $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{G}_2$ (jer je $\mathcal{G}_2$ filter na X) što povlači $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{D}$.
Do istog zaključka dolazimo ako je $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$.
Pretpostavimo da je $F \in \mathcal{D}$ te da je $H \subseteq X$ takav da je $F \subseteq H$. Slijedi da je $F \in \mathcal{G}$ za neki $\mathcal{G} \in D$.Budući da je $\mathcal{G}$ filter, slijedi $H \in \mathcal{G}$. Stoga je $H \in \mathcal{D}$.
Zaključak: $\mathcal{D}$ je filter na X i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$. Prema tome, $\mathcal{D} \in G$.
Iz definicije od $\mathcal{D}$ slijedi da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$ za svaki $\mathcal{G} \in D$.
Dakle, $\mathcal{G} \leq \mathcal{D}$ za svaki $\mathcal{G} \in D$ pa je $\mathcal{D}$ gornja međa od D u $(G, \leq)$.
Prema tome, svaki dobro uređen skup u $(G, \leq)$ je odozgo omeđen. Iz Teorema 2.2.1 slijedi

da postoji maksimalan element $\mathcal{G}$ u $(G, \leq)$.
Očito je $\mathcal{G}$ filter na X takav da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Tvrdimo da je $\mathcal{G}$ ultrafilter na X. Pretpostavimo suprotno.
Tada postoji filter $\mathcal{G}^{'}$ na X takav da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{'}$ i $\mathcal{G} \neq \mathcal{G}^{'}$. Slijedi $\mathcal{G}^{'} \in G$ i $\mathcal{G} \prec \mathcal{G}^{'}$. To je u kontradikciji sa činjenicom da je $\mathcal{G}$ maksimalan element u $(G, \leq)$.
Prema tome, $\mathcal{G}$ je ultrafilter na X. $\square$

Poglavlje 3

Kartezijev produkt topoloških prostora

3.1 Kartezijev produkt skupova. Baza. Otvoren skup. Predbaza

Definicija 3.1.1. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija skupova.*
Definiramo

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f : A \to \cup_{\alpha\in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall\alpha \in A\}.$$

Za $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ kažemo da je KARTEZIJEV PRODUKT indeksirane familije skupova $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$.
Dakle, ako je $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ onda je $x : A \to \cup_{\alpha\in A} X_\alpha$ funkcija takva da je $x(\alpha) \in X_\alpha, \forall\alpha \in A$.
Za $\alpha \in A$ umjesto $x(\alpha)$ pišemo x_α.
Funkciju x označavamo (x_α) ili $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Primjer 3.1.1. *Neka su S i T skupovi. Neka je (X_α) indeksirana familija skupova definirana sa $X_1 = S$ i $X_2 = T$.Tada je:*

$$\prod_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha = \{f : \{1,2\} \to S \cup T \mid f(1) \in S, f(2) \in T\}.$$

Promotrimo funkciju

$$b : S \times T \to \prod_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha$$

definirane tako da je za $(x, y) \in S \times T$ $b(x, y)$ funkcija $f : \{1,2\} \to S \cup T, f(1) = x$ i $f(2) = y$.
Lako se provjeri da je b bijekcija.

Definicija 3.1.2. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.*
Kažemo da je $\mathcal{B}$ BAZA TOPOLOGIJE $\mathcal{T}$ ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.

Definicija 3.1.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$.
Definiramo

$$K_d(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

Za $K_d(x_0, r)$ *kažemo da je OTVORENA KUGLA u* (X, d) *oko* x_0 *radijusa* r.
Umjesto $K_d(x_0, r)$ *kraće pišemo* $K(x_0, r)$.

Definicija 3.1.4. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te* $U \subseteq X$.
Kažemo da je U OTVOREN SKUP u metričkom prostoru (X, d) *ako za svaki* $x \in U$ *postoji* $r > 0$ *takav da je* $K(x_0, r) \subseteq U$.

Sljedeća propozicija se lako dokazuje:

Propozicija 3.1.1. *Neka je* (X, d) *metrički prostor.*

(1.) $\emptyset, X$ *su otvoreni skupovi u* (X, d)

(2.) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija otvorenih skupova u* (X, d). *Tada je* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ *otvoren skup u* (X, d).

(3.) Neka su U, V *otvoreni skupovi u* (X, d). *Tada je* $U \cap V$ *otvoren skup u* (X, d).

Propozicija 3.1.2. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$. *Tada je* $K(x_0, r)$ *otvoren skup u* (X, d).

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r)$.
Tvrdimo da je

$$K(x, r - d(x, x_0)) \subseteq K(x_0, r). \tag{3.1}$$

Neka je $y \in K(x, r - d(x, x_0))$.
Vrijedi:

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < (r - d(x, x_0)) + d(x, x_0) = r.$$

Dakle, $y \in K(x_0, r)$.
Prema tome, (3.1) vrijedi. Time je tvrdnja dokazana. □

Ako je d metrika na skupu X, onda sa $\mathcal{T}_d$ označavamo familiju svih skupova koji su otvoreni u metričkom prostoru (X, d).
Iz Definicije 1.1.1 i Propozicije 3.1.1 slijedi da je $\mathcal{T}_d$ topologija na X.
Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je topologija inducirana metrikom d.

Definicija 3.1.5. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je metrizabilan ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.*

Primjer 3.1.2. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan.*
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji metrika d na X takva da je

$$\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d.$$

Odaberimo $a, b \in X, a \neq b$.
Tada je $d(a, b) > 0$ i imamo $K(a, d(a, b)) \in \mathcal{T}_d$.
Dakle,

$$K(a, d(a, b)) \in \{\emptyset, X\}$$

pa je $K(a, d(a, b)) = \emptyset$ ili $K(a, d(a, b)) = X$. No, to je nemoguće jer je $a \in K(a, d(a, b))$, a $b \notin K(a, d(a, b))$

Primjer 3.1.3. *Neka je d metrika na skupu X te neka je $\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

Dokaz. Slijedi iz Propozicije 3.1.2 i Definicije 3.1.4. □

Propozicija 3.1.3. *Neka je X skup, neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X te neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X takve da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_1$ i baza topologije $\mathcal{T}_2$.*
Tada je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{T}_1$. Za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq U$.Tada je

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Budući da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_2$, za svaki $x \in U$ vrijedi $B_x \in \mathcal{T}_2$.
Stoga je

$$\bigcup_{x \in U} B_x \in \mathcal{T}_2,$$

tj. $U \in \mathcal{T}_2$.
Time smo dokazali da je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Analogno vidimo da je $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Dakle, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

Teorem 3.1.1. *Neka je X neprazan skup te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da vrijedi sljedeće*

(1.) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

(2.) Za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, i svaki $x \in B_1 \cap B_2$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Tada postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Dokaz. Definirajmo $\mathcal{T}$ kao familiju svih $U \subseteq X$ takvih da vrijedi sljedeće:
za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.
Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.
Očito je $\emptyset \in \mathcal{T}$. Iz (1.) slijedi da je $X \in \mathcal{T}$.
Neka je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$.
Tvrdimo da je

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Uzmimo da je $x \in \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Tada je $x \in U_{\alpha_0}$ za neki $\alpha_0 \in A$. Budući da je $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$.
Slijedi, $x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Dakle, $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
Neka su $U, V \in \mathcal{T}$. Tvrdimo da je $U \cap V \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in U \cap V$. Budući da je $U \in \mathcal{T}$ slijedi da postoji $B_1 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_1 \subseteq U$. Također, budući da je $V \in \mathcal{T}$, postoji $B_2 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_2 \subseteq V$.
Sada, iz (2.) slijedi da za $x \in B_1 \cap B_2$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Dakle, $x \in B_3 \subseteq U \cap V$ pa je $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Zaključak: $\mathcal{T}$ je topologija na X.
Jedinstvenost slijedi iz prethodne propozicije. □

Propozicija 3.1.4. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori.*
Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{S}$ te neka je $f : X \to Y$.
Tada je f neprekidna obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Ako je f neprekidna, onda je očito $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, za svaki $B \in \mathcal{B}$.
Obratno, pretpostavimo da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.
Neka je $V \in \mathcal{S}$. Neka je $x \in V$. Budući da je $\mathcal{B}$ baza potoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq V$.
Slijedi da je $V = \cup_{x\in V} B_x$.
Nadalje,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\cup_{x\in V} B_x) = \cup_{x\in V} f^{-1}(B_x).$$

Po pretpostavci znamo da je $f^{-1}(B_x) \in \mathcal{T}$ za svaki $x \in V$, a $\cup_{x\in V} f^{-1}(B_x) \in \mathcal{T}$ iz svojstva (2.) definicije topologije.
Prema tome, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Dakle, f je neprekidna. □

Definicija 3.1.6. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X te neka je $\mathcal{P}$ familija podskupova od X takva da je*

$$\{P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n \mid P_1, P_2, ...P_n \in \mathcal{P}\}$$

baza topologije $\mathcal{T}$.
Tada za $\mathcal{P}$ kažemo da je PREDBAZA topologije $\mathcal{T}$.

Propozicija 3.1.5. *Neka je X neprazan skup te $\mathcal{P}$ familija podskupova od X takva da je $\cup_{p\in\mathcal{P}}P = X$. Tada postoji jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{P}$ predbaza.*

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{B} = \{P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n \mid P_1, P_2, ...P_n \in \mathcal{P}\}.$$

Pretpostavimo da su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X kojima je $\mathcal{P}$ predbaza. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologija $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ pa iz Propozicije 3.1.3 slijedi da je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
Očito je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ stoga je $\cup_{P\in\mathcal{P}}P \subseteq \cup_{B\in\mathcal{B}}B$, no $X = \cup_{P\in\mathcal{P}}P$ pa je $X \subseteq \cup_{B\in\mathcal{B}}B$.
Prema tome,

$$X = \cup_{B\in\mathcal{B}}B.$$

Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te neka je $x \in B_1 \cap B_2$.
Definiramo

$$B_3 = B_1 \cap B_2.$$

Iz definicije od $\mathcal{B}$ je očito da je $B_3 \in \mathcal{B}$. Nadalje, očito je da je

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Iz Teorema 3.1.1 sijedi da postoji topologija $\mathcal{T}$ na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.
Dakle, $\mathcal{P}$ je predbaza od $\mathcal{T}$. □

Propozicija 3.1.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $\mathcal{P}$ predbaza topologije $\mathcal{S}$ te neka je $f : X \to Y$ funkcija.*
Tada je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako za svaki $P \in \mathcal{P}$ vrijedi

$$f^{-1}(P) \in \mathcal{T}.$$

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{B} = \{P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n \mid P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}.$$

Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije S. Stoga je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ pa iz $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ slijedi $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$. Stoga je, ako je f neprekidna $f^{-1}(P) \in \mathcal{T}$ za svaki $P \in \mathcal{P}$.
Obratno, pretpostavimo da je

$$B = P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n$$

za neke $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}$. Vrijedi $f^{-1}(B) = f^{-1}(P_1 \cap P_2 ... \cap P_n) = f^{-1}(P_1) \cap f^{-1}(P_2) \cap ... f^{-1}(P_n)$. Vrijedi: $f^{-1}(P_1), ... f^{-1}(P_n) \in \mathcal{T}$ pa je

$$f^{-1}(P_1) \cap f^{-1}(P_2) \cap ... f^{-1}(P_n) \in \mathcal{T}.$$

Prema tome, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, za svaki $B \in \mathcal{B}$. Iz Propozicije 3.1.4 slijedi da je f neprekidna.
$\square$

3.2 Produktna topologija

Definicija 3.2.1. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija topoloških prostora. Za svaki $\alpha \in A$ imamo $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$, gdje je X_α^s skup, a $\mathcal{T}_\alpha$ topologija na X_α^s.*
Na skupu $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$ definiramo topologiju na sljedeći način.
Neka je

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in A, U_\alpha = X_\alpha^s \text{ za sve osim za konačno mnogo } \alpha \in A\}.$$

Očito je $\mathcal{B}$ familija podskupova od $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$.
Tvrdimo da postoji jedinstvena topologija na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza.
U tu svrhu dovoljno je provjeriti da vrijede pretpostavke Teorema 3.1.1 .
Očito je $\prod_\alpha X_\alpha^s \in \mathcal{B}$ pa je

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s.$$

Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.
Tada je

$$B_1 = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

$U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in A, U_\alpha = X_\alpha^s$ za svaki $\alpha \in A \setminus K_1$, gdje je K_1 konačan podskup od A te

$$B_2 = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha,$$

$V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in A, V_\alpha = X_\alpha^s$ za svaki $\alpha \in A \setminus K_2$, gdje je K_2 konačan podskup od A.
Lako se provjeri da je

$$B_1 \cap B_2 = \prod_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap V_\alpha).$$

Za svaki $\alpha \in A$ vrijedi $U_\alpha \cap V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ (jer su $U_\alpha, V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$), a za svaki $\alpha \in (A \setminus K_1) \cap (A \setminus K_2)$

vrijedi $U_\alpha \cap V_\alpha = X^s_\alpha$.
No,

$$(A \setminus K_1) \cap (A \setminus K_2) = A \setminus (K_1 \cup K_2),$$

a $K_1 \cup K_2$ *je konačan skup.*
Zaključujemo da je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.
Dakle, za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *vrijedi* $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. *Iz ovoga lako slijedi da je zadovoljen uvjet (2) iz Teorema 3.1.1 .*
Prema tome, postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ *na* $\prod_{\alpha\in A} X^s_\alpha$ *kojoj je* $\mathcal{B}$ *baza.*
Za $\mathcal{R}$ *kažemo da je PRODUKTNA TOPOLOGIJA na* $\prod_{\alpha\in A} X^s_\alpha$, *a za topološki prostor* $(\prod_{\alpha\in A} X^s_\alpha, \mathcal{R})$ *kažemo da je PRODUKT INDEKSIRANE FAMILIJE topoloških prostora* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$.
Taj topološki prostor označavamo $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

3.3 Projekcije i predbaza

Definicija 3.3.1. *Neka je* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *indeksirana familija skupova. Za* $\beta \in A$ *definiramo funkciju*

$$p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$$

sa

$$p_\beta(x) = x(\beta),$$

tj. $p_\beta((x_\alpha)) = x_\beta$. *Za* p_β *kažemo da je PROJEKCIJA NA* β*- KOORDINATU* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Napomena 3.3.1. *Neka je* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *indeksirana familija topoloških prostora,* $X_\alpha = (X^s_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\forall \alpha \in A$. *Za* $\beta \in A$ *sa* p_β *označimo projekciju na* β *koordinatu indeksirane familije* $(X^s_\alpha)_{\alpha\in A}$.
Dakle, $p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X^s_\alpha \to X^s_\beta$.

Propozicija 3.3.1. *Neka je* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *indeksirana familija topoloških prostora te* $\beta \in A$. *Tada je* p_β *neprekidna funkcija između topoloških prostora* $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *i* X_β.

Dokaz. Za svaki $\alpha \in A$ imamo $X_\alpha = (X^s_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.
Neka je $\beta \in A$. Neka je $W \in \mathcal{T}_\beta$.
Vrijedi:

$$p_\beta^{-1}(W) = \{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X^s_\alpha \mid p_\beta((x_\alpha)) \in W\} = \{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X^s_\alpha \mid x_\beta \in W\}$$

pa je $p_\beta^{-1}(W) = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, gdje je

$$U_\alpha = \begin{cases} X^s_\alpha, \ \alpha \neq \beta, \\ W, \ \alpha = \beta. \end{cases}$$

Stoga je $p_\beta^{-1}(W)$ element baze produktne topologije iz definicije. Prema tome, p_β je neprekidna funkcija između topoloških prostora $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ i X_β. □

Propozicija 3.3.2. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija topoloških prostora, $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$ za svaki $\alpha \in A$. Neka je $\mathcal{P} = \{p_\beta^{-1}(W) \mid W \in \mathcal{T}_\beta, \beta \in A\}$. Tada je $\mathcal{P}$ predbaza topologije na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.*

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \forall\alpha \in A, U_\alpha = X_\alpha^s \textit{ za sve osim za konačno mnogo } \alpha \in A\}.$$

Znamo da je $\mathcal{B}$ baza topologije na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Tvrdimo da je

$$\{P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\} = \mathcal{B} \tag{3.2}$$

U dokazu Propozicije 3.3.1 smo vidjeli da za svaki $P \in \mathcal{P}$ vrijedi $P \in \mathcal{B}$.
S druge strane, ranije smo vidjeli da je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, stoga je familija $\mathcal{B}$ zatvorena na konačne presjeke.
Prema tome,

$$\{P_1 \cap ... \cap P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\} \subseteq \mathcal{B}.$$

S druge strane, neka je $B \in \mathcal{B}$.
Tada je $B = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \forall\alpha \in A, U_\alpha = X_\alpha^s, \forall\alpha \in A \setminus K$, gdje je K konačan podskup od A.
Ako je $K = \emptyset$ onda je $B = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s$ pa za bilo koji $\beta \in A$ vrijedi $B = p_\beta^{-1}(X_\beta^s)$. Dakle, $B \in \mathcal{P} \subseteq \{P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n \mid P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$.
Pretpostavimo sada da je $K \neq \emptyset$.
Tada je $K = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$. Tvrdimo da je:

$$\prod_{\alpha\in A} U_\alpha = p_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap p_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap ... \cap p_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n}). \tag{3.3}$$

Neka je $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$.
Tada je $x_\beta \in U_\beta$ za svaki $\beta \in A$, tj. $p_\beta((x_\alpha)) \in U_\beta$, za svaki $\beta \in A$, stoga je $(x_\alpha) \in p_\beta^{-1}(U_\beta)$, za svaki $\beta \in A$ pa je očito $(x_\alpha) \in p_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap ... \cap p_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$.
Pretpostavimo sada da je $(x_\alpha) \in p_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap ... \cap p_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$. Tada je $(x_\alpha) \in p_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}), (x_\alpha) \in p_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}), ..., (x_\alpha) \in p_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$ pa slijedi $x_{\beta_1} \in U_{\beta_1}, ..., x_{\beta_n} \in U_{\beta_n}$.
Dakle, $x_\alpha \in U_\alpha$ za svaki $\alpha \in K$.
Uzmimo $\alpha \in A \setminus K$. Tada je $U_\alpha = X_\alpha^s$ pa je $x_\alpha \in U_\alpha$ (jer je očito $x_\alpha \in X_\alpha^s$). Prema tome, $x_\alpha \in U_\alpha$, za svaki $\alpha \in A$.

Prema tome, $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$.
Time smo dokazali da (3.3) vrijedi. Dakle, $B \in \{P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n \mid P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$.
Time smo dokazali da vrijedi (3.2) pa tvrdnja propozicije vrijedi. □

Propozicija 3.3.3. *Neka su $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{V})$ topološki prostori. Neka je $x_0 \in X$ te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te neka je $g : Y \to Z$ funkcija neprekidna u $f(x_0)$ s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{V}$. Tada je funkcija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna u x_0 s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{V}$.*

Dokaz. Neka je W okolina od $(g \circ f)(x_0)$, tj. od $g(f(x_0))$ u $(Z, \mathcal{V})$. Budući da je g neprekidna u $f(x_0)$ postoji okolina V od $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$ tako da je $g(V) \subseteq W$.
Budući da je f neprekidna u x_0 postoji okolina U od x_0 tako da je $f(U) \subseteq V$. Slijedi $g(f(U)) \subseteq g(V)$ pa je $g(f(U)) \subseteq W$.
Očito je $g(f(U)) = (g \circ f)(U)$.
Prema tome, $(g \circ f)(U) \subseteq W$.
Zaključak: $g \circ f$ je neprekidna u x_0. □

Korolar 3.3.1. *Neka su $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{V})$ topološki prostori. Neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te $g : Y \to Z$ funkcija neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{V}$.Tada je funkcija $gof : X \to Z$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{V}$.*

Dokaz. Ovo slijedi iz Propozicije 1.2.2 i Propozicije 3.3.3. □

Propozicija 3.3.4. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija topoloških prostora, $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$ za svaki $\alpha \in A$ te neka je $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostor. Neka je $f : Y \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$.
Tada je f neprekidna obzirom na $\mathcal{S}$ i produktnu topologiju na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$ ako i samo ako za svaki $\beta \in A$ vrijedi da je funkcija $p_\beta \circ f : Y \to X_\beta^s$ neprekidna obzirom na topologije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}_\beta$.*

Dokaz. Ako je f neprekidna, onda iz Propozicije 3.3.1 i Korolara 3.3.1 slijedi da je $p_\beta \circ f$ neprekidna funkcija za svaki $\beta \in A$.
Pretpostavimo sada da je $p_\beta \circ f$ neprekidna funkcija za svaki $\beta \in A$. Neka je

$$\mathcal{P} = \{p_\beta^{-1}(W) \mid \beta \in A, W \in \mathcal{T}_\beta\}.$$

Prema Propoziciji 3.3.1 i Propoziciji 3.1.6 dovoljno je dokazati da je $f^{-1}(P) \in \mathcal{S}$ za svaki $P \in \mathcal{P}$.
Neka je $P \in \mathcal{P}$. Tada je $P = p_\beta^{-1}(W), \beta \in A$, $W \in \mathcal{T}_\beta$.
Vrijedi:

$$f^{-1}(P) = f^{-1}(p_\beta^{-1}(W)) = (p_\beta \circ f)^{-1}(W).$$

Vrijedi:

$$(p_\beta \circ f)^{-1}(W) \in \mathcal{S}$$

jer je $p_\beta \circ f$ nepekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}_\beta$. Prema tome, $f^{-1}(P) \in \mathcal{S}$. Time smo dokazali da je f neprekidna. □

Konvergencija filtera i prijekcija na beta koordinatu

Propozicija 3.3.5. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija topoloških prostora, $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$ za svaki $\alpha \in A$. Neka je $\mathcal{F}$ filter na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s$ te neka je $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s$. Tada $\mathcal{F} \to (x_\alpha)$ u $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ako i samo ako za svaki $\beta \in A$ vrijedi $p_\beta(\mathcal{F}) \to x_\beta$ u X_β.*

Dokaz. Ako $\mathcal{F} \to (x_\alpha)$, onda iz Propozicije 3.3.1 i Propozicije 1.3.2 slijedi da $p_\beta(\mathcal{F}) \to x_\beta$ u X_β za svaki $\beta \in A$.
Obratno, pretpostavimo da $p_\beta(\mathcal{F}) \to x_\beta$ za svaki $\beta \in A$.
Neka je N okolina od (x_α) u $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Želimo dokazati da je $N \in \mathcal{F}$(ako to dokažemo onda smo gotovi).
Prema definiciji okoline postoji otvoren skup W u $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ takav da je

$$(x_\alpha) \in W \subseteq N. \tag{3.4}$$

Iz Propozicije 3.3.2 slijedi da postoje $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in A$ te $U_1 \in \mathcal{T}_{\beta_1}, ..., U_n \in \mathcal{T}_{\beta_n}$ takvi da je

$$(x_\alpha) \in p_{\beta_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap p_{\beta_n}^{-1}(U_n) \subseteq W. \tag{3.5}$$

Neka je $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Iz (3.5) slijedi da je $(x_\alpha) \in p_{\beta_i}^{-1}(U_i)$ pa je $x_{\beta_i} \in U_i$.
Dakle, U_i je okolina od x_{β_i} u X_{β_i} pa iz $p_{\beta_i}(\mathcal{F}) \to x_{\beta_i}$ slijedi da je $U_i \in p_{\beta_i}(\mathcal{F})$.
Iz definicije slike filtera slijedi da postoji $F \in \mathcal{F}$ takav da je $p_{\beta_i}(F) \subseteq U_i$. Ovo povlači da je $F \subseteq p_{\beta_i}^{-1}(U_i)$ pa iz definicije filtera dobivamo da je $p_{\beta_i}^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$.
Dakle, $p_{\beta_1}^{-1}(U_1) \in \mathcal{F}, ..., p_{\beta_n}^{-1}(U_n) \in \mathcal{F}$ pa je

$$p_{\beta_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap p_{\beta_n}^{-1}(U_n) \in \mathcal{F}$$

Iz (3.5) i (3.4) slijedi da je $N \in \mathcal{F}$.
Zaključak: $\mathcal{F} \to (x_\alpha)$. □

3.4 Tihonovljev teorem

Teorem 3.4.1. **(Tihonovljev teorem)**
Neka je $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija topoloških prostora. Pretpostavimo da je X_α kompaktan topološki prostor za svaki $\alpha \in A$.
Tada je $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ kompaktan topološki prostor.

Dokaz. Imamo $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$ za svaki $\alpha \in A$.
Prema Propoziciji 1.3.2 dovoljno je dokazati da svaki filter na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$ ima gomilište u $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.
Neka je $\mathcal{F}$ filter na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$.
Prema Propoziciji 2.3.1 postoji ultrafilter $\mathcal{G}$ na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$ takav da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
Neka je $\beta \in A$.
Imamo filter $p_\beta(\mathcal{G})$ na X_β^s pa iz činjenice da je X_β kompaktan prostor i Propozicije 1.3.2 slijedi da postoji $x_\beta \in X_\beta^s$ takav da je x_β gomilište od $p_\beta(\mathcal{G})$ u X_β. Prema Propoziciji 1.4.3 $p_\beta(\mathcal{G})$ je ultrafilter na X_β^s.
Sada iz Propozicije 1.4.2 slijedi da $p_\beta(\mathcal{G}) \to x_\beta$.
Dakle, imamo $(x_\beta) \in \prod_{\beta \in A} X_\beta^s$ i $p_\beta(\mathcal{G}) \to x_\beta$ za svaki $\beta \in A$. Prema Propoziciji 3.3.5 vrijedi $\mathcal{G} \to (x_\beta)$.
Iz Propozicije 1.3.3 slijedi da je (x_β) gomilište od $\mathcal{F}$.
Dakle, svaki filter na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$ ima gomilište u $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.
Zaključak: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je kompaktan topološki prostor.
([1]) □

3.5 Prvi i drugi aksiom prebrojivosti

Definicija 3.5.1. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da zadovoljava DRUGI AKSIOM PREBROJIVOSTI ako postoji prebrojiva familija $\mathcal{B}$ takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.*

Primjer 3.5.1. *Neka je X neprebrojiv skup.*
Tada topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ ne zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.
Naime, ako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{P}(X)$, onda za svaki $x \in X$ vrijedi $\{x\} \in \mathcal{B}$ pa imamo injekciju $X \to \mathcal{B}$, $x \mapsto \{x\}$ što pokazuje da je $\mathcal{B}$ neprebrojiv skup.
Primjetimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ metrizabilan. Naime, ako je X bilo koji neprazan skup, lako se vidi da je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

metrika na X.
Za metriku d kažemo da je DISKRETNA METRIKA na X.
Uočimo da za svaki $x \in X$ vrijedi $K(x, 1) = \{x\}$. Neka je $U \subseteq X$. Tada za svaki $x \in U$ očito vrijedi $K(x, 1) \subseteq U$. Prema tome, svaki podskup od X je otvoren u metričkom prostoru (X, d).
Dakle, $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$, što znači da je topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ metrizabilan.

Definicija 3.5.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $x \in X$ te neka je $\mathcal{B}$ familija nekih okolina od x u $(X, \mathcal{T})$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ BAZA OKOLINA od x u $(X, \mathcal{T})$ ako za svaku okolinu N od x u $(X, \mathcal{T})$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $B \subseteq N$.*

Definicija 3.5.3. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da zadovoljava PRVI AKSIOM PREBROJIVOSTI ako za svaki $x \in X$ postoji prebrojiva familija $\mathcal{B}$ takva da je $\mathcal{B}$ baza okolina od x u $(X, \mathcal{T})$.*

Propozicija 3.5.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.*
Tada $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

Dokaz. Znamo da postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{T}$.
Neka je $x \in X$. Definirajmo $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$.
Očito je svaki element od $\mathcal{B}'$ okolina točke x.
Neka je N okolina točke x. Tada postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U \subseteq N$.
Budući da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$. Slijedi, $B \in \mathcal{B}'$ i $B \subseteq N$.
Prema tome, $\mathcal{B}'$ je baza okolina točke x. Iz $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ slijedi da je $\mathcal{B}$ prebrojiva familija.
Zaključak: Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. □

Propozicija 3.5.2. *Svaki metrizabilan prostor zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan prostor. Tada postoji metrika d na X takva da je

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_d.$$

Neka je $x \in X$.
Definirajmo

$$\mathcal{B} = \{K(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $K(x, 1/n) \in \mathcal{T}_d$.
Prema tome, elementi od $\mathcal{B}$ su okoline od x u $(X, \mathcal{T})$.
Neka je N okolina od x u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U \subseteq N$. Imamo $U \in \mathcal{T}_d$.
Dakle U je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) pa postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.
Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n \leq r$.
Imamo:

$$K(x, 1/n) \subseteq K(x, r) \subseteq U \subseteq N.$$

Dakle, $K(x, 1/n) \subseteq N$, a očito je $K(x, 1/n) \in \mathcal{B}$.
Prema tome, $\mathcal{B}$ je baza okolina od x u $(X, \mathcal{T})$. Očito je $\mathcal{B}$ prebrojiva familija. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.5.3. *Svaki metrizabilan prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan prostor.
Tada postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.
Neka su $x, y \in X, x \neq y$. Definirajmo $r = d(x, y)/2$. Očito je $r > 0$.
Definirajmo $U = K(x, r)$ i $V = K(y, r)$. Očito su $U, V \in \mathcal{T}$. Nadalje, $x \in U$ i $y \in V$.
Dokažimo da je $U \cap V = \emptyset$.
Pretpostavimo suprotno.
Tada postoji $z \in X$ takav da je $d(x, z) \leq r$ i $d(z, y) \leq r$ iz čega slijedi:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq r + r = 2r = d(x, y).$$

Kontradikcija.
Prema tome, $U \cap V = \emptyset$.
Time smo dokazali da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor. □

Propozicija 3.5.4. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija topoloških prostora. Pretpostavimo da je X_α Hausdorffov prostor za svaki $\alpha \in A$.*
Tada je $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ Hausdorffov prostor.

Dokaz. Imamo $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$ za svaki $\alpha \in A$.
Neka su $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, $(x_\alpha) \neq (y_\alpha)$.
Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$. Imamo da je $x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}^s$ pa budući da je topološki prostor $(X_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0})$ Hausdorffov, postoje $U, V \in \mathcal{T}_{\alpha_0}$ takvi da je $x_{\alpha_0} \in U$,$y_{\alpha_0} \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.
Skupovi $p_{\alpha_0}^{-1}(U)$ i $p_{\alpha_0}^{-1}(V)$ su otvoreni u $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (prema Propoziciji 3.3.1) te očito vrijedi $(x_\alpha) \in p_{\alpha_0}^{-1}(U)$, $(y_\alpha) \in p_{\alpha_0}^{-1}(V)$ i

$$p_{\alpha_0}^{-1}(U) \cap p_{\alpha_0}^{-1}(V) = \emptyset$$

(zbog $U \cap V = \emptyset$).
Zaključak: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je Hausdorffov prostor. □

Lema 3.5.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor, $x \in X$ te neka je $\mathcal{B}$ baza okolina točke x. Tada je:*

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \{x\}.$$

Dokaz. Očito je $\{x\} \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$.
Pretpostavimo da je $y \in X$ takav da je $y \neq x$.
Tada postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $y \in U, x \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.
Očito je V okolina od x pa postoji $B_0 \in \mathcal{B}$ takav da je $B_0 \subseteq V$. Slijedi:

$$B_0 \cap U = \emptyset$$

pa $y \notin B_0$.
Stoga $y \notin \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$.
Time smo dokazali da je

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \{x\}$$

pa je tvrdnja teorema dokazana.

□

Definicija 3.5.4. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je netrivijalan ako ima barem 2 elementa.*

Teorem 3.5.1. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija topoloških prostora. Pretpostavimo da je A neprebrojiv skup te da je X_α netrivijalan Hausdorffov prostor za svaki $\alpha \in A$. Tada niti jedna točka topološkog prostora $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ nema prebrojivu bazu okolina.*
Posebno, topološki prostor $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

Dokaz. Imamo: $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$ za svaki $\alpha \in A$.
Neka je $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$.
Pretpostavimo da (x_α) ima prebrojivu bazu okolina $\mathcal{B}$ u $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.
Dakle,

$$\mathcal{B} = \{N_i \mid i \in \mathbb{N}\} \tag{3.6}$$

gdje je (N_i) niz okolina točke (x_α).
Neka je $i \in \mathbb{N}$.
Tada postoji otvoren skup W u $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ takav da je $(x_\alpha) \in W \subseteq N_i$. Iz Propozicije 3.3.2 slijedi da postoje $n_i \in \mathbb{N}$, $\beta_1^i, ..., \beta_{n_i}^i \in A$ te $U_1^i \in \mathcal{T}_{\beta_1^i}, ..., U_{n_i}^i \in \mathcal{T}_{\beta_{n_i^i}}$ takvi da je $(x_\alpha) \in p_{\beta_1^i}^{-1}(U_1^i) \cap ... \cap p_{\beta_{n_i}^i}^{-1}(U_{n_i}^i) \subseteq W$ stoga je

$$(x_\alpha) \in p_{\beta_1^i}^{-1}(U_1^i) \cap ... \cap p_{\beta_{n_i}^i}^{-1}(U_{n_i}^i) \subseteq N_i \tag{3.7}$$

Skup

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\beta_1^i, ..., \beta_{n_i}^i\}$$

je prebrojiv (kao prebrojiva unija prebrojivih skupova) pa budući da je A neprebrojiv postoji $\gamma \in A$ takav da $\gamma \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{\beta_1^i, ..., \beta_{n_i}^i\}$.
Skup X_γ^s ima bar 2 elementa pa postoji $z \in X_\gamma^s$ takav da je $z \neq x_\gamma$.
Definirajmo $(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s$ sa:

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha, \alpha \neq \gamma, \\ z, \alpha = \gamma. \end{cases}$$

Očito je $y_\gamma \neq x_\gamma$ pa je:

$$(x_\alpha) \neq (y_\alpha) \tag{3.8}$$

Neka je $i \in N$ te neka je $j \in \{1, 2, ..., n_i\}$. Iz (3.7) slijedi da je $(x_\alpha) \in p_{\beta_j^i}(U_j^i)$. Stoga je $x_{\beta_j^i} \in U_j^i$.
Iz definicije od (y_α) je jasno da je $y_{\beta_j^i} = x_{\beta_j^i}$ (jer je $\beta_j^i \neq \gamma$). Stoga je:

$$y_{\beta_j^i} \in U_j^i$$

pa je $(y_\alpha) \in p_{\beta_j^i}^{-1}(U_j^i)$. Dakle, ovo vrijedi za svaki $j \in \{1, ..., n_i\}$. Stoga je $(y_\alpha) \in p_{\beta_1^i}^{-1}(U_1^i) \cap ... \cap p_{\beta_{n_i}^i}^{-1}(U_{n_i}^i)$. Iz (3.7) slijedi da je $(y_\alpha) \in N_i$.
Ovo dakle vrijedi za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je $(y_\alpha) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i$. No, iz Leme 3.5.1 i 3.6 slijedi da je $\cap_{i\in\mathbb{N}} N_i = \{(x_\alpha)\}$ pa je $(y_\alpha) \in \{(x_\alpha)\}$.
No, ovo je u kontradikciji sa (3.8).
Zaključak: točka (x_α) nema prebrojivu bazu okolina u $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. □

Primjer 3.5.2. (Produkt metrizabilnih prostora ne mora biti metrizabilan)
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $[0, 1]$.
Topološki prostor $([0, 1], \mathcal{E})$ *je očito metrizabilan pa je i Hausdorffov. Odaberimo neki neprebrojiv skup A.*
Za $\alpha \in A$ definirajmo:

$$X_\alpha = ([0, 1], \mathcal{E}).$$

Na taj način dobivamo indeksiranu familiju topoloških prostora $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$. Prema Teoremu 3.5.1 topološki prostor $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti pa iz Propozicije 3.5.2 slijedi da $\prod_{\alpha\in A}$ nije metrizabilan.
Uočimo da je X_α metrizabilan prostor za svaki $\alpha \in A$.

3.6 Topološki ekvivalentne metrike

Definicija 3.6.1. *Neka su d i d' metrike na skupu X. Kažemo da su d i d' topološki ekvivalentne metrike ako je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.*

Propozicija 3.6.1. *Neka je d metrika na skupu X.*
Definirajmo $d^{'} : X \times X \to \mathbb{R}$ sa

$$d^{'}(x, y) = min\{1, d(x, y)\}.$$

Tada je $d^{'}$ metrika na X topološki ekvivalentna metrici d.

Dokaz. Prva tri svojstva iz definicije metrike za $d^{'}$ su očita. Neka su $x, y, z \in X$.
Želimo dokazati da je:

$$d^{'}(x, y) \leq d^{'}(x, z) + d^{'}(z, y) \tag{3.9}$$

Pretpostavimo da je $d^{'}(x, y) = 1$. Ako je $d^{'}(x, z) = 1$ ili $d^{'}(z, y) = 1$ onda 3.9 očito vrijedi.
Inače imamo $d^{'}(x, z) = d(x, z)$ i $d^{'}(z, y) = d(z, y)$ pa je

$$d^{'}(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d^{'}(x, z) + d^{'}(z, y).$$

Prema tome, (3.9) vrijedi.
Pretpostavimo sada da je $d^{'}(x, y) = d(x, y)$. Ako je $d^{'}(x, z) = 1$ ili $d^{'}(z, y) = 1$ onda 3.9 vrijedi jer je $d^{'}(x, y) \leq 1$.
Inače imamo $d^{'}(x, z) = d(x, z)$ i $d^{'}(z, y) = d(z, y)$ pa je

$$d^{'}(x, y) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d^{'}(x, z) + d^{'}(z, y),$$

dakle, (3.9) vrijedi.
Prema tome, $d^{'}$ je metrika na X.
Lako se vidi da za svaki $x \in X$ i $0 < r < 1$ vrijedi

$$K_d(x, r) = K_{d'}(x, r). \tag{3.10}$$

Pokažimo sada da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.
Neka je $U \in \mathcal{T}_d$. Neka je $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K_d(x, r) \subseteq U$. Možemo pretpostaviti da je $r < 1$. Iz 3.10 slijedi da je $K_{d'}(x, r) \subseteq U$. Zaključujemo da je $U \in \mathcal{T}_{d'}$.
Dakle, $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$.
Analogno dokazujemo da je $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$. Prema tome, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. Dakle, metrike d i $d^{'}$ su topološki ekvivalentne. □

Napomena 3.6.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ te da je $d(x, y) \leq 1$ za sve $x, y \in X$.*
To slijedi iz Propozicije 3.6.1.

Teorem 3.6.2. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija topoloških prostora. Pretpostavimo da je X_α metrizabilan za svaki $\alpha \in A$ te da je skup A prebrojiv. Tada je topološki prostor $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ metrizabilan.*

Dokaz. Imamo $X_\alpha = (X_\alpha^s, \mathcal{T}_\alpha)$, za svaki $\alpha \in A$.
Postoji surjekcija

$$\alpha : \mathbb{N} \to A.$$

Za $i \in \mathbb{N}$ označimo $\alpha(i)$ sa α_i.
Imamo dakle: $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$.
Neka je $i \in \mathbb{N}$. Topološki prostor X_{α_i} je metrizabilan pa postoji metrika d_i na $X_{\alpha_i}^s$ takva da je $\mathcal{T}_{\alpha_i} = \mathcal{T}_{d_i}$ i $d_i(x, y) \leq 1$ za sve $x, y \in X_{\alpha_i}^s$.
Definirajmo $D : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s \times \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s \to \mathbb{R}$ sa

$$D((x_\alpha), (y_\alpha)) = \sup\{\frac{1}{2^i} d_i(x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Dokažimo da je D metrika na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$. Prva tri svojstva iz definicije metrike se lako provjere. Neka su $(x_\alpha), (y_\alpha)$ i $(z_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$.Neka je $i \in \mathbb{N}$.
Budući da je d_i metrika na X_{α_i} vrijedi

$$\frac{1}{2^i} d_i(x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}) \leq \frac{1}{2^i} d_i(x_{\alpha_i}, z_{\alpha_i}) + \frac{1}{2^i} d_i(z_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}) \leq D((x_\alpha), (z_\alpha)) + D((z_\alpha), (y_\alpha)).$$

Dakle, $\frac{1}{2^i} d_i(x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}) \leq D((x_\alpha), (z_\alpha)) + D((z_\alpha), (y_\alpha))$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ što znači da je broj $D((x_\alpha), (z_\alpha)) + D((z_\alpha), (y_\alpha))$ gornja međa skupa $\{\frac{1}{2^i} d_i(x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ pa je veći ili jednak od supremuma tog skupa. Prema tome:

$$D((x_\alpha), (y_\alpha)) \leq D((x_\alpha), (z_\alpha)) + D((z_\alpha), (y_\alpha)).$$

Time smo dokazali da je D metrika na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s$.
Imamo $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = (\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s, \mathcal{R})$.
Dokažimo da je $\mathcal{R} = \mathcal{T}_D$. Dokažimo prvo da je $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}_D$. U tu svrhu, prema Propoziciji 3.3.2, dovoljno je dokazati da je $p_\beta^{-1}(U) \in \mathcal{T}_D$ za svaki $\beta \in A$ i svaki $U \in \mathcal{T}_\beta$.
Naime, ako je $\mathcal{P}$ predbaza topologije $\mathcal{R}$ takva da je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_D$ onda je očito $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_D$, gdje je

$$\mathcal{B} = \{P_1 \cap ... \cap P_n \mid P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$$

pa je i svaki skup koji je unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$ element od $\mathcal{T}_D$,a to znači da je $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}_D$ (jer je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{R}$).
Neka su $\beta \in A$ i $U \in \mathcal{T}_\beta$. Dokažimo da je $p_\beta^{-1}(U) \in \mathcal{T}_D$,tj. da je $p_\beta^{-1}(U)$ otvoren skup u metričkom prostoru $(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s, D)$.
Neka je $(x_\alpha) \in p_\beta^{-1}(U)$. Tada je $x_\beta \in U$. Imamo $\beta = \alpha_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$ pa je $U \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$, tj. $U \in \mathcal{T}_{d_i}$.
Dakle, U je otvoren skup u metričkom prostoru $(X_{\alpha_i}^s, d_i)$. Slijedi da postoji $r > 0$ takav da je

$$K_{d_i}(x_\beta, r) \subseteq U. \tag{3.11}$$

Tvrdimo da je:

$$K_D((x_\alpha), \frac{1}{2^i}r) \subseteq p_\beta^{-1}(U) \tag{3.12}$$

Neka je $(y_\alpha) \in K_D((x_\alpha), \frac{1}{2^i}r)$. Tada je

$$D((x_\alpha), (y_\alpha)) < \frac{1}{2^i}r. \tag{3.13}$$

Iz definicije funkcije D je jasno da je

$$\frac{1}{2^i}d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \leq D((y_\alpha), (x_\alpha)). \tag{3.14}$$

Iz zadnje dvije nejednakosti (3.13) i (3.14) slijedi

$$\frac{1}{2^i}d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) < \frac{1}{2^i}r,$$

tj. $d_i(y_\beta, x_\beta) < r$.
Prema tome $y_\beta \in K_{d_i}(x_\beta, r)$ pa iz 3.11 slijedi da je $y_\beta \in U$.
To znači da je $(y_\alpha) \in p_\beta^{-1}(U)$. Time smo dokazali 3.12.
Prema tome,

$$p_\beta^{-1}(U) \in \mathcal{T}_D.$$

Zaključak: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}_D$.
Dokažimo sada da je $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{R}$.
U tu svrhu dovoljno je dokazati da je svaka otvorena kugla u metričkom prostoru $(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, D)$ element od $\mathcal{R}$.
Neka su $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ i $r > 0$.
Odaberimo $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{2^{i_0}} < \frac{r}{2}$.
Imamo:

$$K_D((x_\alpha), r) = \{(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s \mid D((y_\alpha), (x_\alpha)) < r\} = \{(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s \mid \sup\{\frac{1}{2^i}d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \mid i \in \mathbb{N}\} < r\}.$$

Tvrdimo da je:

$$\{(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s \mid \sup\{\frac{1}{2^i}d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \mid i \in \mathbb{N}\} < r\} = \{(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s \mid \frac{1}{2^i}d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i})r\ \forall i \in \{1, ..., i_0\}\}. \tag{3.15}$$

Očito da je lijevi skup sadržan u desnom.
Obratno, pretpostavimo da je $(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^s$ takav da je

$$\frac{1}{2^i}d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) < r$$

za svaki $i \in \{1, ..., i_0\}$.
Neka je

$$m = \max\{\frac{1}{2^i} d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \mid i \in \{1, ..., i_0\}\}.$$

Očito je $m \prec r$.
Neka je $M = \max\{m, \frac{r}{2}\}$.
Ako je $i \leq i_0$ onda je $\frac{1}{2^i} d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \leq m \leq M$.
Ako je $i \geq i_0$ onda je $\frac{1}{2^i} d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \leq \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^i_0} \prec \frac{r}{2} \prec M$.
Dakle,

$$\frac{1}{2^i} d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \leq M,$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema tome, M je gornja međa skupa skupa

$$\{\frac{1}{2^i} d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

. pa je supremum tog skupa manji od r (očito je M ≺ r). Time smo dokazali da vrijedi 3.15.
Slijedi,

$$\begin{aligned} K_D((x_\alpha), r) &= \{(y_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s \mid \frac{1}{2^i} d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \prec r, \forall i \in \{1, ..., i_0\}\} \\ &= \{(y_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s \mid d_i(y_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \prec 2^i r, \forall i \in \{1, ..., i_0\}\} \\ &= \{(y_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^s \mid y_{\alpha_i} \in K_{d_i}(x_{\alpha_i}, 2^i r), \forall i \in \{1, ..., i_0\}\} \\ &= \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \end{aligned}$$

gdje je

$$U_\alpha = \begin{cases} K_{di}(x_{\alpha_i}, 2^i r) & , \textit{ako je } \alpha = \alpha_i \textit{ za neki } i \in \{1, ..., i_0\}, \\ X_\alpha^s & , \textit{inace}. \end{cases}$$

Očito je $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{R}$ pa imamo

$$K_D((x_\alpha), r) \in \mathcal{R}.$$

Time smo dokazali da je

$$\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{R}$$

pa zaključujemo da je $\mathcal{T}_D = \mathcal{R}$.
Dakle, topološki prostor $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je metrizabilan. □

3.7 Hilbertova kocka i svojstva. Separabilnost.

Kompaktnost i separabilnost Hilbertove kocke

Definicija 3.7.1. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na* $[0,1]$.
Za $i \in \mathbb{N}$ neka je $X_i = ([0,1], \mathcal{E})$ te $X_i^s = [0,1]$.
Na taj način smo definirali indeksiranu familiju topoloških prostora $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
Za topološki prostor $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ kažemo da je HILBERTOVA KOCKA.
Označavamo ga sa I^∞.
Nadalje $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i^s$ označavamo sa I_s^∞.

Uočimo sljedeće:
I_s^∞ je skup svih funkcija $x : \mathbb{N} \to \cup_{i\in\mathbb{N}} X_i^s$ takvih da je $x(i) \in X_i^s$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Dakle, I_s^∞ je skup svih funkcija $\mathbb{N} \to [0,1]$, tj. $I_s^\infty = [0,1]^\mathbb{N}$.
Prema Teoremu 3.6.2 Hilbertova kocka je metrizabilan prostor.
Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ identiteta.
Za svaki $i \in \mathbb{N}$ neka je d_i euklidska metrika na $[0,1]$.
Iz dokaza Teorema 3.6.2 slijedi da je funkcija $D : I_s^\infty \times I_s^\infty \to \mathbb{R}$,

$$D((x_i),(y_i)) = \sup\{\frac{1}{2^i}|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$$

metrika na I_s^∞ koja inducira topologiju od I^∞.
Dakle,

$$I^\infty = (I_s^\infty, \mathcal{T}_D).$$

Teorem 3.7.1. *Hilbertova kocka je kompaktan prostor.*

Dokaz. Poznato je da je topološki prostor $([0,1], \mathcal{E})$ kompaktan (dokaz te činjenice može se naći u [4]).
Iz Tihonovljevog teorema slijedi da je Hilbertova kocka kompaktan topološki prostor. □

Definicija 3.7.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $A \subseteq X$.*
Za A kažemo da je GUST SKUP u $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ takav da je $U \neq \emptyset$ vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.

Propozicija 3.7.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Tada je A gust skup u $(X, \mathcal{T}_d)$ ako i samo ako za svaki $x \in X$ i $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \epsilon$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A gust skup u $(X, \mathcal{T}_d)$.
Neka su $x \in X$ i $\epsilon > 0$.
Imamo $K(x, \epsilon) \in \mathcal{T}_d$ pa je

$$K(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Dakle, postoji $a \in A$ takav da je $a \in K(x, \epsilon)$,tj. $d(x, a) < \epsilon$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki $x \in A$ i svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \epsilon$.
Neka je $U \in \mathcal{T}_d$ takav da je $U \neq \emptyset$.
Odaberimo $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.
Prema pretpostavci, postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < r$, tj. $a \in K(x, r)$.
Slijedi, $a \in U$ pa je

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

Prema tome, A je gust skup u $(X, \mathcal{T}_d)$. □

Definicija 3.7.3. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je SEPARABILAN ako postoji prebrojiv skup koji je gust u $(X, \mathcal{T})$.*

Primjer 3.7.1. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$.*
Iz Propozicije 3.7.1 slijedi da je $\mathbb{Q}$ gust skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Prema tome, topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ je separabilan.

Teorem 3.7.2. *Hilbertova kocka je separabilan prostor.*

Dokaz. Za neki $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$A_n = \{(x_i) \in I_s^\infty \mid x_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \{1, ..., n\}, x_i = 0, \forall i > n\}.$$

Očito je da postoji bijekcija između A_n i $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^n$ pa zaključujemo da je A_n prebrojiv skup.
Definirajmo $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
Tada je $\mathcal{A}$ prebrojiv skup (kao prebrojiva unija prebrojivih skupova).
Tvrdimo da je $\mathcal{A}$ gust skup u I^∞.
U tu svrhu ćemo iskorisititi Propoziciju 3.7.1 i činjenicu da je $I^\infty = (I_s^\infty, \mathcal{T}_D)$.
Neka su $(x_i) \in I_s^\infty$ i $\epsilon > 0$.
Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$.
Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ odaberimo $a_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ takav da je

$$|x_i - a_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

(takav a_i sigurno postoji).
Za $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i > n$ definirajmo

$$a_i = 0.$$

Na ovaj način smo dobili niz (a_i) u $[0, 1]$.
Očito je $(a_i) \in A_n$ pa je $(a_i) \in \mathcal{A}$.
Tvrdimo da je

$$D((x_i), (a_i)) < \epsilon. \tag{3.16}$$

Ako je $i \leq n$ onda je

$$\frac{1}{2^i}|x_i - a_i| \leq |x_i - a_i| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ako je $i > n$ onda je

$$\frac{1}{2^i}|x_i - a_i| = \frac{1}{2^i}|x_i| \leq \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dakle, $\frac{1}{2^i}|x_i - a_i| < \frac{\epsilon}{2}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je

$$\sup\{\frac{1}{2^i}|x_i - a_i| \mid i \in \mathbb{N}\} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

iz čega očito slijedi 3.16.
Iz Propozicije 3.7.1 slijedi da je $\mathcal{A}$ gust skup u I^∞.
Prema tome, topološki prostor I^∞ je separabilan. □

Primjer 3.7.2. *Neka je $P : I_s^\infty \times I_s^\infty \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$P((x_i), (y_i)) = sup\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Lako se provjeri da je P metrika na I_s^∞.
Dokažimo da topološki prostor $(I_s^\infty, \mathcal{T}_P)$ nije separabilan. Neka je

$$D = \{(x_i) \in I_s^\infty \mid x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Za $(x_i), (y_i) \in D$ takve da je $(x_i) \neq (y_i)$ očito vrijedi $P((x_i), (y_i)) = 1$ što povlači da je

$$K_P((x_i), \frac{1}{2}) \cap K_P((y_i), \frac{1}{2}) = \emptyset. \tag{3.17}$$

Uočimo da je skup D neprebrojiv.
Pretpostavimo da postoji gust i prebrojiv skup A u $(I_s^\infty, \mathcal{T}_P)$.
Tada za svaki $x \in D$ prema Propoziciji 3.7.1 postoji $a_x \in A$ takav da je $P(x, a_x) < \frac{1}{2}$.
Funkcija $D \to A$, $x \mapsto a_x$ je injekcija (što slijedi iz (3.17 i činjenice da je $a_x \in K_p(x, \frac{1}{2})$ za svaki $x \in D$).
Ovo je nemoguće jer je D neprebrojiv skup, a A prebrojiv.
Zaključak: Topološki prostor $(I_s^\infty, \mathcal{T}_P)$ nije separabilan.
Iz ovoga i Teorema 3.7.2 slijedi da $(I_s^\infty, \mathcal{T}_P)$ nije Hilbertova kocka, tj.

$$\mathcal{T}_P \neq \mathcal{T}_D.$$

Bibliografija

[1] W. L. Voxman C. O. Christenson, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[2] Grayson, *Zorn's lemma*, `https://faculty.math.illinois.edu/~dan/Courses/1999/Fall/401/Zorn.pdf`.

[3] K. Horvatić, *Linearna algebra,*, PMF-Matematički odjel i LPC, 1995.

[4] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, (1975).

Sažetak

Ovaj diplomski rad je osmišljen na način da nakon što uvedemo sve pojmove i "pripremimo" teren za proučavanje većih svojstava zapravo dobijemo važne rezultate.
Prvo poglavlje se bavi općenito pomovima iz topologije poput otvorenih skupova, zatvaraču, kompaktnosti, neprekidnosti, filterima...
U drugom poglavlju na parcijalno uređenom skupu, uz pomoć svojstava koje ima, proučava se kada neki skup ima maksimalan element te se dolazi do Zornove leme i njenih posljedica.
Treće poglavlje opisuje stvaranje topologije na produktu, uvode se projekcije, ispituju svojstva produktne topologije(kompaktnost, separabilnost, metrizabilnost) i dolazi do zaključka da je važan i indeksni skup za konstrukciju i svojstva samog produkta. Iako smo krenuli od pojedinog topološkog prostora, na kraju ipak zaključujemo da je Hilbertova kocka osim produkta zapravo i skup svih funkcija sa skupa prirodnih brojeva na interval od 0 do 1.

Summary

This graduate thesis is designed in such a way that after we introduce all the terms and ”prepare” the ground for studying the larger properties we actually get important results.
The first chapter deals generally with topology exits such as open sets, shutter, compactness, continuity, filters ...
In the second chapter on a partially arranged set, with the help of its properties, it is studied when some set has the maximum element and comes to Zorn’s lemma and its consequences.
Chapter 3 describes the creation of topology on the product, introduces projections, examines the properties of the product topology (compactness, separability, metrizability) and concludes that an index and a set of properties for the construction and properties of the product are also important. Although we have gone from a particular topological space, we conclude, in the end, that Hilbert’s cube, apart from the product, is actually a set of functions from a set of natural numbers at an interval of 0 to 1.

Životopis

Rođena sam u Splitu, 18.10.1993.g,a do treće godine života živjela sam u malom selu Slimenu u blizini Omiša.

2001.g. sam krenula u osnovnu školu na Mejašima (OŠ Mejaši-Split),a 2008.g. postajem gimnazijalka (matematička gimnazija- III.gimnazija u Splitu).

2012.g sam upisala Prirodoslovno matematički fakultet na sveučilištu u Splitu(smijer: Matematika i informatika) te kao krunu prediplomskog obrazovanja dobila Dekanovu nagradu.

2015.g sam se prebacila na istomeni fakultet u Zagrebu(smijer: Matematička statistika). U slobodno vrijeme igram odbojku.